UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

Contributo da abordagem exploratória nas justificações matemáticas de alunos do 10.º ano de escolaridade

Rodrigo Miguel Henriques Chaves

Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada
Orientado pela Prof.ª Doutora Ana Cláudia Batalha Henriques
Coorientado pela Prof.ª Doutora Maria Manuel Torres

2023

Resumo

Neste trabalho de cariz investigativo pretendo estudar o contributo da abordagem exploratória nas justificações matemáticas dos alunos de uma turma do 10.º ano de escolaridade no domínio da Geometria no Espaço.

Em particular, procuro caracterizar as justificações apresentadas pelos alunos, compreender quais as suas principais dificuldades associadas a este processo de raciocínio matemático, e identificar quais as características da abordagem exploratória que se revelaram mais potenciadoras no desenvolvimento das justificações dos alunos. O estudo assenta num paradigma interpretativo, e segue uma abordagem qualitativa.

Os métodos e procedimentos de recolha de dados foram a observação direta, a recolha das produções escritas dos alunos e a realização de entrevistas. A turma é constituída por vinte e sete alunos, em que vinte e seis são participantes. A intervenção letiva foi realizada em oito aulas de noventa minutos, e foram propostas seis fichas de trabalho com base nos princípios definidos no Projeto Raciocínio Matemático e Formação de Professores para promover as justificações.

A análise dos dados foi conduzida com base em três dimensões: caracterização das justificações, dificuldades dos alunos e ações do professor para promover o raciocínio matemático dos alunos.

Os resultados indicaram variações no nível de complexidade das justificações, especialmente em função do tipo de questão apresentado: quanto maior o grau de desafio, mais divergentes foram os níveis observados. Quanto ao tipo de formalidade, a variação resultou do conhecimento prévio do aluno e da sua sensibilidade em perceber quais os elementos da situação deveriam ser enfatizados. Nas dificuldades, a mais comum foi compreenderem quando a justificação estava completa. Quanto às características da abordagem exploratória, foi durante os momentos de discussão coletiva, sobretudo por meio de ações de apoiar/guiar e desafiar, que se observou o maior desenvolvimento das justificações dos alunos.

Palavras-chave: Justificações matemáticas; Abordagem Exploratória; Cálculo Vetorial no Espaço.

Abstract

In this investigative work, I aim to study the contribution of the exploratory approach in the mathematical justifications of 10th-grade students in the field of Space Geometry.

Specifically, I seek to characterize the justifications presented by students, understand their main difficulties associated with this process of mathematical reasoning, and identify the characteristics of the exploratory approach that proved most conducive to the development of students' justifications. The study is based on an interpretative paradigm and follows a qualitative approach.

Data collection methods and procedures included direct observation, collection of students' written productions, and conducting interviews. The class consists of twenty-seven students, with twenty-six participating. The teaching intervention took place in eight ninety-minute classes, and six worksheets were proposed based on the principles defined in the Mathematical Reasoning and Teacher Training Project to promote justifications.

Data analysis was conducted based on three dimensions: characterization of justifications, students' difficulties, and teacher actions to promote students' mathematical reasoning.

The results indicated variations in the level of complexity of justifications, especially depending on the type of question presented: the higher the degree of challenge, the more divergent the observed levels. Regarding the type of formality, the variation resulted from the student's prior knowledge and their sensitivity to understanding which elements of the situation should be emphasized. In terms of difficulties, the most common was understanding when the justification was complete. Regarding the characteristics of the exploratory approach, the greatest development of students' justifications was observed during moments of collective discussion, especially through supporting/guiding and challenging actions.

Keywords: Mathematical justifications; Exploratory approach; Vector Calculus in Space.

Agradecimentos

Agradeço à minha Orientadora, Prof.ª Doutora Ana Cláudia Henriques e à minha Coorientadora, Prof.ª Doutora Maria Torres, por terem aceitado acompanhar-me, por sua assistência e envolvimento dedicado em todas as etapas, pela iluminação das ideias, esclarecimentos impecáveis, pelas discussões pertinentes, e pela paciência na transmissão do vasto conhecimento teórico e prático de ambas quanto ao tema deste trabalho.

Ao Professor-Cooperante João Ferreira, pelo acolhimento durante a minha passagem pela Escola Secundária Rainha Dona Leonor, pela sua empatia excecional, pelo apoio incondicional durante o estágio e por ser um modelo como profissional ao qual quero seguir.

A todos os Professores, dos quais fui aluno, no Instituto da Educação e na Faculdade de Ciências, pela contribuição intelectual e científica, que me forneceram todas as bases necessárias para a minha formação académica e profissional.

À Professora Doutora Hélia Oliveira, com profunda admiração pelo seu profissionalismo e empenho como docente, que culminaram na sua total disponibilidade em me auxiliar de maneira pertinente e assertiva.

À Gabriela Passos, minha colega de estágio e amiga, por sua amizade, incentivo nos momentos de desânimo e conselhos que me ajudaram durante a minha caminhada académica.

À minha namorada, pela força que me transmite, pela paciência e pelo amor demonstrado ao longo de toda a caminhada que fizemos juntos. Agradecer-te não é algo que se escreva num papel, mas sim algo que partilhamos ao longo da vida. No entanto... OBRIGADO.

Por fim, agradeço aos meus queridos alunos da turma do 10.º ano da Escola Secundária Rainha Dona Leonor, por colaborarem com este professor em formação e por compartilharem as suas experiências e sentimentos quanto ao ensino em Matemática, informações cruciais para esta investigação.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE GRÁFICOS

ÍNDICE DE TABELAS

ÍNDICE DE ANEXOS

1. INTRODUÇÃO

Neste primeiro capítulo, começo por apresentar as motivações pessoais que me conduziram a realizar o presente relatório, no âmbito da Prática de Ensino Supervisionada, assim como a sua pertinência. Em seguida, refiro os objetivos e as questões deste trabalho de cariz investigativo. A intervenção ocorreu no segundo semestre do ano letivo 2022/2023 e foram realizadas oito aulas de noventa minutos cada uma.

1.1. Motivações pessoais e Pertinência do Estudo

A escolha do tema surge durante as quatro aulas que lecionei no contexto da Unidade Curricular de Iniciação à Prática Profissional III, onde tive a oportunidade de analisar as justificações apresentadas pelos alunos aquando da realização e discussão de duas tarefas com vista à promoção do raciocínio matemático. Durante esta análise, tomei consciência de que os alunos assumiam certa resistência a este processo de raciocínio matemático, sendo necessário questioná-los constantemente para emergir alguma justificação, dado que a sua preocupação estava em apresentar resultados e não em justificar a estratégia utilizada, que é um aspeto que se tem verificado em diversos trabalhos anteriores (Henriques, 2010; Ponte, Mata-Pereira & Henriques, 2012).

A par da necessária consciencialização destes alunos sobre a necessidade de justificar, cuja importância tem de ser compreendida desde cedo no seu percurso escolar (NCTM, 2007), também pude constatar que apresentaram algumas dificuldades em formular justificações de natureza matemática, visto que recorriam principalmente ao senso comum, e não mencionavam os conteúdos matemáticos envolvidos (Mata-Pereira, 2018). Esta dificuldade, do que pude observar, é especialmente preocupante no domínio da Geometria, pois os alunos em vez de sustentarem as suas justificações com base em propriedades matemáticas, tinham a tendência de fundamentá-las segundo perceções que obtiveram de determinadas representações visuais.

Deste modo, percebi que, apesar da turma envolvida neste estudo apresentar níveis de aproveitamento escolar consideravelmente díspares, as dificuldades quanto à justificação são comuns a todos, o que despertou o meu interesse em aprofundar o meu conhecimento sobre este processo de raciocínio matemático.

Portanto, decidi optar por uma estratégia de ensino exploratório, pois esta abordagem tem o potencial de incentivar os alunos a apresentarem e a desenvolverem justificações cada vez mais adequadas ao centrar a argumentação no raciocínio e na evidência matemática (Ponte, 2005; Ponte, Quaresma & Mata-Pereira, 2020) e escolhi aplicar o meu tema na unidade de ensino da Geometria Analítica e Cálculo Vetorial no Espaço, no sentido de evoluir o “raciocínio geométrico (dos alunos) de impressões visuais vagas para a exploração empírica e dedução” (NCTM, 2009).

Com esta oportunidade, tenho como intenção criar possibilidades aos alunos de clarificarem e desenvolverem o seu raciocínio matemático, que é um dos grandes objetivos curriculares atuais, transversal a qualquer domínio matemático (DGE, 2018).

1.2. Objetivos e Questões do Estudo

O objetivo deste trabalho é estudar o contributo da abordagem exploratória nas justificações matemáticas dos alunos de uma turma do 10.º ano de escolaridade na unidade didática do Cálculo Vetorial no Espaço. Neste sentido, irei responder às seguintes questões:

- Como se caracterizam as justificações matemáticas apresentadas pelos alunos?
- Quais as principais dificuldades dos alunos na formulação de justificações?
- Que características da abordagem exploratória se revelaram mais potenciadoras no desenvolvimento das justificações dos alunos?

1.3. Organização do Estudo

O presente relatório é subdividido em seis capítulos distintos. O primeiro capítulo, intitulado “Introdução”, explora as motivações pessoais, a relevância do estudo, os objetivos e as questões de investigação tratadas. O segundo capítulo, "Enquadramento Curricular e Didático", trata o contexto educacional e as diretrizes curriculares pertinentes ao tema deste relatório. No terceiro capítulo, "A Unidade Didática", apresento informações sobre a escola, a turma, os conhecimentos matemáticos envolvidos, os recursos utilizados e as abordagens adotadas na criação das fichas. O quarto capítulo, "Métodos e Procedimentos de Recolha De Dados", aborda as escolhas metodológicas feitas no decorrer da pesquisa, incluindo os instrumentos de coleta de dados, a justificação para sua utilização e questões éticas relacionadas. No quinto capítulo, "Análise de Dados", apresento a análise dos dados coletados em relação ao objetivo do estudo.

Finalmente, no sexto capítulo, "Conclusões", destaco os principais resultados obtidos ao longo do trabalho e respondo às questões de pesquisa formuladas. Além disso, realizo uma reflexão global sobre todo o estudo realizado.

2. ENQUADRAMENTO CURRICULAR E DIDÁTICO

Este capítulo aborda o contexto educacional e as diretrizes curriculares relacionadas ao tema escolhido para estudo. Aqui serão explorados os conceitos que envolvem o raciocínio matemático, com um foco particular nos tipos e processos de raciocínio matemático. Além disso, este capítulo abordará uma estratégia específica de ensino - a abordagem exploratória – cuja uma das suas principais características é promover o desenvolvimento do raciocínio matemático. Apresentarei como essa abordagem, ao encorajar os alunos a pensar criticamente, pode fazê-los superar desafios durante a aprendizagem.

2.1. Raciocínio Matemático

O desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos é um dos objetivos essenciais do ensino da Matemática e está presente ao longo de toda a escolaridade obrigatória (DGE, 2018), no entanto não existe uma definição consensual sobre o que é raciocinar matematicamente (Ponte, Quaresma & Mata-Pereira, 2020). Na perspetiva de Mata-Pereira (2018), "raciocinar matematicamente é fazer inferências de forma justificada, seja indutiva, abdutiva ou dedutivamente" (p.23). Esta perspetiva, apesar de ser bastante abrangente, uma vez que acomoda diferentes tipos de raciocínio: o dedutivo, o indutivo e abdutivo, todos assentam no princípio que raciocinar matematicamente envolve partir de conhecimentos já aprendidos para obter novos conhecimentos. O principal fator que permite distinguir qual o tipo de raciocínio que está a ser utilizado é o modo como acontece essa passagem de conhecimento prévio para o novo (Mata-Pereira, 2018).

2.1.2. Raciocínio Dedutivo, Indutivo e Abdutivo

Raciocinar dedutivamente, segundo Ponte et al. (2008), "envolve sobretudo encadear asserções de forma lógica e justificar esse encadeamento". Este raciocínio é desenvolvido do geral para o particular, com uma conclusão necessária e irrefutável, assumindo que o encadeamento das asserções justificadas que a produziram esteja isenta de erros, tal lhe confere um papel de validação do conhecimento matemático (Oliveira, 2008; Ponte, Mata-Pereira & Henriques, 2012).

Contudo, apesar desta função estruturante do raciocínio dedutivo, como destaca Ponte et al. (2020) é o raciocínio indutivo e abdutivo, os maiores responsáveis pelas novas descobertas. O raciocínio indutivo consiste em desenvolver generalizações de uma determinada propriedade encontrada num conjunto restrito de objetivos. O raciocínio abdutivo envolve a observação de certo fenómeno invulgar em casos particulares e a procura de uma explicação para essa ocorrência, através da formulação de conjeturas e generalizações que se baseiem nas relações encontradas na determinada situação (Mata-Pereira, 2018).

Deste modo, como refere Rivera e Becker (2009), estes três tipos de raciocínio são complementares e devem ser desenvolvidos em sala de aula: o raciocínio dedutivo desempenha um papel central na validação de afirmações matemáticas, e muitas dessas afirmações são criadas através de raciocínio indutivo ou abdutivo.

2.2. Processos de Raciocínio Matemático

Existem vários processos envolvidos no raciocino matemático, como a formulação de conjeturas, generalizações e a justificação. Destes processos, generalizar e justificar são os que mais se destacam como essenciais no raciocínio matemático (Mata-Pereira, 2018). A generalização envolve, sobretudo, afirmar que uma determinada propriedade matemática é comum a um conjunto mais alargado de objetos, e a justificação consiste em apresentar razões que convençam o próprio e também os outros sobre a validade de uma afirmação ou resultado matemático (Ponte, Quaresma & Mata-Pereira, 2019).

No Programa e Metas Curriculares de Matemática A do Ensino Secundário (2013), o raciocínio indutivo, associado ao processo de generalização, surge como "fundamental na atividade matemática", embora o mesmo documento afirme que "os alunos deverão saber que o raciocínio indutivo não é apropriado para justificar propriedades" e pode conduzir "conclusões erradas a partir de hipóteses verdadeiras". Nesse sentido, o programa demonstra uma grande preocupação pelo raciocínio dedutivo, alertando os alunos que quando formulam uma generalização, deverão justificá-la posteriormente, de forma a obter conclusões necessariamente válidas.

Nas Aprendizagens Essenciais (DGE, 2018), o desenvolvimento do raciocínio matemático continua a ser considerado como essencial na aprendizagem matemática. Neste documento, as principais práticas associadas a este objetivo envolvem: "Abstrair e generalizar, e reconhecer e elaborar raciocínios lógicos e argumentos matemáticos, incluindo a demonstração, discutindo e criticando argumentos de outros" e "Comunicar utilizando linguagem matemática, oralmente e por escrito, para descrever, explicar e justificar raciocínios, procedimentos e conclusões".

2.2.1. Justificações Matemáticas

Uma justificação para ser considerada de natureza matemática tem que ser baseada em “conceitos, propriedades, procedimentos e ideias matemáticas” e não “na autoridade, perceção, senso comum ou exemplos particulares” (Mata-Pereira, 2018).

Mais concretamente, a justificação é caracterizada como um processo de raciocínio fundamental para a validação do conhecimento matemático, sendo a capacidade de justificar “procedimentos, raciocínios e conclusões” uma prática que vem referida nas Aprendizagens Essenciais como essencial a todos os níveis de ensino (DGE, 2018).

As justificações podem assumir diferentes níveis de formalidade e complexidade, como evidencia a tabela seguinte de Mata-Pereira (2018). Isto revela que os alunos têm a capacidade de desenvolver justificações progressivamente mais formais e complexas.

Tabela 1 – Níveis de formalidade e de complexidade das justificações (Mata-Pereira, 2018, p.29)

Tipos crescentes de formalidade →

<table>
<tr><td colspan="3"></td><td>0</td><td colspan="3">Não justificar</td><td rowspan="7">↓ Níveis crescentes de complexidade</td></tr>
<tr><td rowspan="6">A
Não formal</td><td rowspan="6">B
Formal mas incompleta</td><td rowspan="6">C
Formal</td><td>1</td><td colspan="3">Autoridade externa</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="3">Evidência empírica</td></tr>
<tr><td rowspan="4">3</td><td>3A</td><td>3B</td><td>3C</td></tr>
<tr><td>Coerência lógica</td><td>Exemplo genérico</td><td>Procedimento ou propriedade</td></tr>
<tr><td colspan="3">Justificação dedutiva</td></tr>
</table>

De acordo com a autora, o nível 0 de complexidade corresponde a resoluções sem qualquer justificação. O nível 1, autoridade externa, corresponde a justificações que se baseiam noutras pessoas ou em materiais de referência. Neste caso, os alunos fundamentam a sua justificação com base em afirmações do professor, no manual ou em colegas com melhores resultados académicos, negligenciado o conteúdo matemático envolvido.

Nas justificações nível 2 de complexidade, baseadas em evidências empíricas, as mais comuns são as justificações percetuais e as justificações baseadas em exemplos. As percetuais decorrem de uma perceção da situação, normalmente obtidas de representações visuais. As que se baseiam em exemplos, são consideradas por Balacheff (1988), uma forma de resistência à generalização, uma vez que os alunos tendem a validar uma generalização alegando que esta funcionou para todos os casos que testaram.

A respeito das justificações de nível 3, estas são de natureza dedutiva e normalmente consideradas parte de uma demonstração, podendo ser subdivididas em três níveis: o nível 3A, 3B e 3C. Apresentar justificações deste nível de complexidade pode ser um sinal de que o aluno reconhece argumentos empíricos como um método impreciso para validar afirmações matemáticas (Mata-Pereira, 2018).

As justificações com nível de complexidade 3A correspondem a justificações baseadas em princípios lógicos, considerando novos resultados matemáticos como consequências lógicas de resultados anteriores. No nível de complexidade 3B encontram-se as justificações decorrentes de exemplos genéricos, que se focam em aspetos gerais de uma situação particular e podem envolver outros processos do raciocínio, como a generalização. Por último, no nível de complexidade 3C, temos as justificações com base em procedimentos ou conceitos, que pretendem explicar as razões por que uma dada afirmação é válida, recorrendo a combinações de propriedades, definições e representações (Mata-Pereira, 2018).

Em relação à formalidade, este é um conceito mais subjetivo, visto que varia de acordo com o nível de escolaridade e o conhecimento dos alunos, portanto depende dos critérios que quisermos atribuir à situação em específico. Ainda assim, é possível identificar três tipos de formalidade: justificações do tipo A, quando o aluno não utiliza conscientemente ou explicitamente um processo de justificação; tipo B, quando são apresentadas justificações formalmente incompletas, por não explicitarem todos os elementos utilizados na situação; e tipo C, quando a justificação é formal completa, baseada num encadeamento lógico de inferências.

No meu estudo, vou recorrer a esta tabela para caracterizar as justificações apresentadas pelos alunos aquando das resoluções de tarefas e nas respetivas discussões coletivas.

2.3. Abordagem Exploratória

Uma aula de ensino exploratório está organizada essencialmente em três fases: introdução da tarefa, realização da tarefa, discussão e sistematização das aprendizagens. Na primeira fase, o professor deve apresentar o contexto da tarefa, os seus objetivos e atraí-los para o desafio. Além disso, o docente deve definir a organização do espaço educativo, certificar-se de que os alunos dispõem de todos os materiais necessários, e estabelecer os tempos que os alunos têm para cada uma das fases da aula (Oliveira et al., 2013). Naturalmente, todos estes fatores devem ser planeados antecipadamente, durante a formulação da tarefa.

Na fase seguinte, da realização da tarefa, o professor monitora as resoluções dos alunos e toma notas dos tipos de ideias matemáticas que estão a serem trabalhadas, a fim de selecionar e sequenciar quais julga as mais importantes para se discutir na próxima fase (Stein et al., 2008), sempre com o cuidado de não reduzir a dificuldade da tarefa e/ou de os conduzir a uma só estratégia, enquanto tira eventuais dúvidas aos alunos (Oliveira et al., 2013).

No último momento, na discussão e sistematização das aprendizagens matemáticas, o professor deve solicitar aos alunos que voltem a trabalhar em turma, e que discutam entre si e com o docente as suas interpretações e estratégias, com base na seleção e na sequência de apresentações devidamente planeadas na fase anterior. Enquanto isso, o professor clarifica as várias resoluções, estabelece conexões entre elas, sempre atento à participação dos alunos, e os encaminha para o objetivo da aula, seja este a introdução de um conceito ou de um procedimento matemático.

Esta abordagem tem assim, dois suportes principais. O primeiro é a escolha de tarefas que não têm um método de resolução imediato. De acordo com o NCTM (2017), estas tarefas desenvolvem o raciocínio matemático dos alunos, visto que o encorajam a usar abordagens e estratégias diferenciadas para a sua resolução. Além disso, é possível as formular de modo a promover processos específicos do raciocínio matemático, como a justificação, ao aplicar os seguintes princípios definidos no Projeto Raciocínio Matemático e Formação de Professores (REASON, 2020): "incluir questões que solicitem ou incentivem a justificação de respostas, ou de estratégias de resolução, ou de afirmações matemáticas"; "incluir questões que solicitem ou incentivem justificações de natureza diversa, nomeadamente com base na coerência lógica, com recurso a exemplos genéricos ou contraexemplos, por exaustão ou absurdo"; "incluir questões que solicitem a identificação justificada da verdade ou falsidade de afirmações matemáticas"; e "incluir questões que solicitem ou incentivem a análise por parte do aluno de justificações apresentadas por outros" (p.4).

O segundo é a criação de um ambiente favorável à participação e reflexão dos alunos, que permita certas ações por parte do professor, como solicitar os discentes a clarificarem as suas justificações, a analisarem justificações alternativas e a compreenderem o que torna uma justificação válida (Ponte, Quaresma & Mata-Pereira, 2020).

Portanto, esta abordagem pode promover a formalização de justificações e de apoiar os alunos a apresentarem justificações válidas e evita a argumentação de que algo é verdade "porque o livro ou o professor o dizem", que é bastante comum em aulas tradicionais (NCTM, 1994).

2.4. Ações do professor

As tarefas de forma individual podem não ser suficientes para promover o raciocínio matemático dos alunos, embora estas possuam importância crucial durante a prática letiva. O modo como as tarefas podem ser usadas em sala de aula, o modo como os alunos se envolvem e as interações que elas podem desencadear são formas complementares de igual importância de se promover o raciocínio matemático (Brodie, 2010)

Neste cenário em particular e levando em conta a complexidade da prática profissional, um elemento crucial a ter em conta são as atitudes do docente. Estas ações são fundamentais para que as atividades em sala de aula decorram, pois estas ações têm origem nos motivos que o docente possui para o propósito de cada atividade (Christiansen & Walther, 1986).

Compreende-se que a promoção do raciocínio matemático dos alunos se inicia pela escolha das tarefas a serem aplicadas em sala de aula. Caso a escolha de tarefas seja desafiante e significativa, as abordagens de ensino e as ações resultantes do professor são igualmente ou mais desafiantes, e por vezes, não compreendidas de imediato pelos alunos. Na perspectiva do professor apresentar muitas sugestões ou informações aos alunos torna a tarefa simplificada, mas não apoia o raciocínio matemático. Na perspectiva dos alunos, o não acompanhamento da resolução das tarefas solicitadas, pode não oferecer o apoio requerido para estimular o raciocínio matemático dos alunos (Brodie, 2010).

Desta forma cabe ao docente encontrar um ponto de equilíbrio colocando as necessidades dos alunos para com a atividade proposta em primeiro lugar em detrimento da simplificação das suas obrigações como professor.

2.4.1. Momentos de discussão coletiva

Há que se observar que as ações do professor que têm como objetivo promover o raciocínio matemático na sala de aula devem estar presentes durante os vários momentos da aula. Desta forma, nas aulas caracterizadas pelo ensino exploratório, os momentos de discussão coletiva são sinalizados como os mais favoráveis para promover o raciocínio matemático dos alunos (Ponte, 2005). Nos momentos de discussão coletiva o professor deve realizar algumas ações que não diferem significativamente das suas ações noutros momentos da aula, sendo estas ligadas em grande parte ao questionamento. Para tanto, o professor deve utilizar o questionamento de forma a evitar dar excessivas indicações para a resolução de tarefas, tendo em vista apoiar o raciocínio e o trabalho do aluno (NCTM, 2009).

Como atitude complementar, o professor deve ainda evitar responder a questionamentos dos alunos que possuam indicações claras de como resolver uma tarefa ou que validem uma ação do aluno, ou conduzi-los de forma implícita a optarem pela estratégia de resolução que atenda às preferencias do professor (Harel & Rabin, 2010). Com este pensamento, o professor deve sustentar o questionamento por questões diversas, particularmente de focalização, confirmação e inquirição (Ponte & Serrazina, 2000).

O objetivo das questões de focalização é conduzir o aluno a seguir um percurso de raciocínio específico, as questões de confirmação têm a finalidade de avaliar os conhecimentos do aluno e são questões das quais o professor possui conhecimento prévio da resposta, as questões de inquirição procuram guiar o aluno a refletir e demonstrar o seu raciocínio para a sua resposta, estimulando-o a comunicar-se e a esclarecer o professor. Desta forma, o questionamento realizado pelo professor é importante nos momentos da resolução das tarefas e durante os momentos de discussão coletiva. Destaca-se ainda que os alunos apresentam a tendência de esperar determinados questionamentos advindos do professor (Brodie, 2010), neste caso o professor acaba por questionar de forma habitual os alunos de modo mais incisivo, e os alunos tornam-se propensos às respostas mais complexas apoiando-as nos processos de raciocínio.

Além do questionamento, nos momentos de discussão coletiva, o professor pode realizar outras ações que culminam na aprendizagem, na explanação e na compreensão de processos de raciocínio matemático. Para que isto ocorra, é significativo promover momentos de discussão coletiva que criem situações para que os alunos explorem, apresentem, discutam e avaliem as suas ideias e as dos seus colegas (Ball & Bass, 2003). Isto cria um ambiente favorável para surgir e se desenvolverem os processos de raciocínio matemático. O professor deve incentivar os alunos, durante as discussões, a ouvir, a questionar e a pedir argumentos para as ideias de seus colegas, com o intuito de refletirem sobre os tópicos apresentados por outros alunos e para partilharem o seu raciocínio (Brodie, 2010).

De forma complementar, o professor ainda deve valorizar as falas dos alunos que explicitem o motivo das suas respostas, superando a simples apresentação de resultados (Sowder & Harel, 1998). Neste contexto, é necessário que as contribuições incorretas e parciais sejam reconhecidas e que as contribuições corretas sejam analisadas no sentido de aprofundá-las (Brodie, 2010). O docente deve ainda promover situações de desacordo entre os alunos, observando que estas situações possuem potencial para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos, entretanto não deve ser o único a arbitrar estes desacordos, correndo o risco de desestimular a discussão entre os alunos (Harel & Rabin, 2010; Wood, 1999).

Cabe aqui destacar que é possível que o professor se depare com uma diversidade de respostas durante a participação dos alunos e deve possuir a capacidade de utilizá-las de forma a conduzir a turma para uma compreensão mais efetiva da Matemática envolvida. Para cumprir este objetivo, são necessárias várias ações que podem envolver solicitar a participação dos alunos, orientar ou focar os alunos com o intuito de esclarecer ou detalhar, disponibilizando nova informação e desafiar os alunos para que apresentem as suas ideias (Krussel Edwards, & Springer, 2004; Kosko, Rougee, & Herbst, 2014). É possível resumir, como mostrado na figura 1, as ações do professor durante as discussões coletivas e sua relação com a promoção do raciocínio matemático (Ponte, Mata-Pereira & Quaresma, 2013).

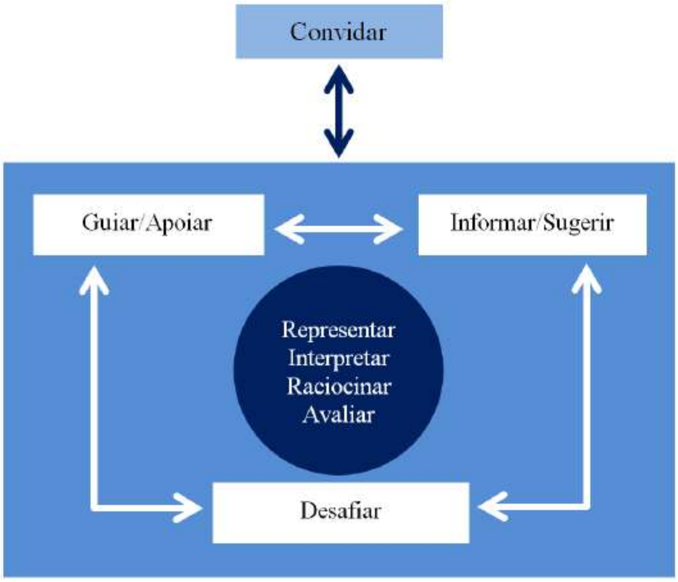


Figura 1: Ações do professor nos momentos de discussão coletiva (Adaptado de Ponte, Mata-Pereira e Quaresma, 2013)

Como visto, as ações do professor durante os momentos de discussão coletiva são identificadas como convidar, informar/sugerir, apoiar/guiar e desafiar. As ações de convidar são, na maioria das vezes, aquelas que iniciam a discussão coletiva, onde o professor procura incentivar os alunos a participarem e partilharem o raciocínio utilizado em sua resolução. Durante o momento da discussão o professor utiliza os demais tipos de ações. No emprego das ações de informar/sugerir o professor fornece informações aos alunos ou valida as suas respostas. Nas ações de apoiar/guiar direciona os alunos a apresentarem informações relacionadas à resolução. Durante as ações de desafiar, os alunos são incentivados a superarem o conhecimento matemático prévio que detinham (Ponte, Mata-Pereira & Quaresma, 2013).

Conclusivamente, conduzir discussões matemáticas em sala de aula possui uma complexidade acentuada, pois o professor tem de apoiar o conteúdo da discussão, a gestão da sala de aula e a gestão da própria discussão. De forma particular, é necessário a articulação das ideias que surgem durante a discussão, e garantir que as noções matemáticas básicas sejam o foco, e estabelecer relações entre os conceitos e ideias matemáticas trabalhadas e as respostas dos alunos. Embora haja o fator de imprevisibilidade das discussões coletivas, é fundamental seu planeamento antecipado, por permitir que o professor determine objetivos que possam ampliar o aprofundamento das tarefas na elaboração de novas questões para aplicação em sala de aula e que sejam promotoras do raciocínio matemático (Brodie, 2010; Henriques, 2010; Sherin, 2002).

3. A UNIDADE DIDÁTICA

O Cálculo Vetorial no Espaço é a subunidade didática escolhida para o desenvolvimento deste trabalho. Esta escolha foi feita com a orientação do meu Professor Cooperante e tendo em conta a relação entre a minha problemática e as dificuldades de aprendizagem que pude acompanhar da turma em estudo.

Assim, de forma a realizar uma proposta pedagógica que promova aprendizagens significativas e que seja adequada aos participantes e ao âmbito deste estudo, começarei por fazer uma caracterização da escola e da turma onde realizei a intervenção letiva. Em seguida, farei uma ancoragem da unidade didática Geometria Analítica e Cálculo Vetorial no Espaço, com base no Programa e Metas Curriculares de Matemática A do Ensino Secundário (2013) e nas Aprendizagens Essenciais de Matemática A do 10.º ano de escolaridade (2018). Por fim, explicitarei e justificarei as estratégias de ensino escolhidas, a natureza das questões presentes nas minhas fichas de trabalho, os recursos e o tipo de avaliação que irei utilizar, tendo em conta os objetivos de aprendizagem visados, e as dificuldades mais frequentes dos alunos.

3.1. Contexto Escolar

3.1.1. Caracterização da Escola

A Escola iniciou suas atividades em 1947 com o nome de Liceu Rainha Dona Leonor. Este liceu era originalmente feminino e estava localizado nas instalações do Palácio Ribeira. Em 1961, instalou-se em Alvalade, ao abrigo do "Plano de 1958", mantendo uma frequência exclusivamente feminina. A população escolar só passou a ser mista após o 25 de Abril de 1974, tendo começado a designar-se por Escola Secundária Rainha Dona Leonor.

A escola foi depois modernizada com o Programa de Modernização do Parque Escolar, sendo agora composta por um conjunto de três edifícios, implementados em "U", no centro dos quais se encontram os campos de jogos e o recreio. O edifício principal tem três pisos, interligando-se com o edifício nascente e acolhe alunos do 3.º ciclo e secundário.

Em 2013, com a integração do Agrupamento de Escolas Eugénio dos Santos e da Escola Secundária Rainha Dona Leonor, foi criado o Agrupamento de Escolas Rainha Dona Leonor (AERDL). A Escola Secundária Rainha Dona Leonor é a sede do AERDL, e de acordo com o seu Projeto Educativo, que é comum às seis instalações de ensino que integram este agrupamento, a sua visão e missão assentam no desenvolvimento pessoal e social do aluno, tendo em vista o seu sucesso académico e educativo e à sua formação como cidadão autónomo, crítico, responsável, criativo e ativo.

O nome atribuído à escola pelo Ministério da Educação trata-se de uma homenagem à rainha D. Leonor de Lencastre pelas suas ações a favor do povo português, sendo uma das mais conhecidas a fundação do Hospital das Caldas da Rainha.

3.1.2. Caracterização da turma

A turma alvo é do 10.º ano de escolaridade do curso de Ciências e Tecnologias, constituída por vinte e sete alunos de nacionalidade portuguesa: doze do sexo feminino (44%) e quinze do sexo masculino (56%), com idades compreendidas entre os 14 e 15 anos de idade.

Nenhum dos alunos que compõem esta turma é repetente, no entanto, existem alguns alunos em risco de reprovação devido a questões de saúde, ou por apresentarem dificuldades recorrentes da não consolidação de tópicos de anos letivos anteriores. A nível socioeconómico não há registo de nenhum aluno inserido no programa de Ação Social Escolar (ASE).

Em relação ao domínio pessoal e social, esta turma apresenta um bom comportamento, com uma média aproximada de 16 valores nas Atitudes no 1.º Período, e uma média de 15 valores no 2.º Período.

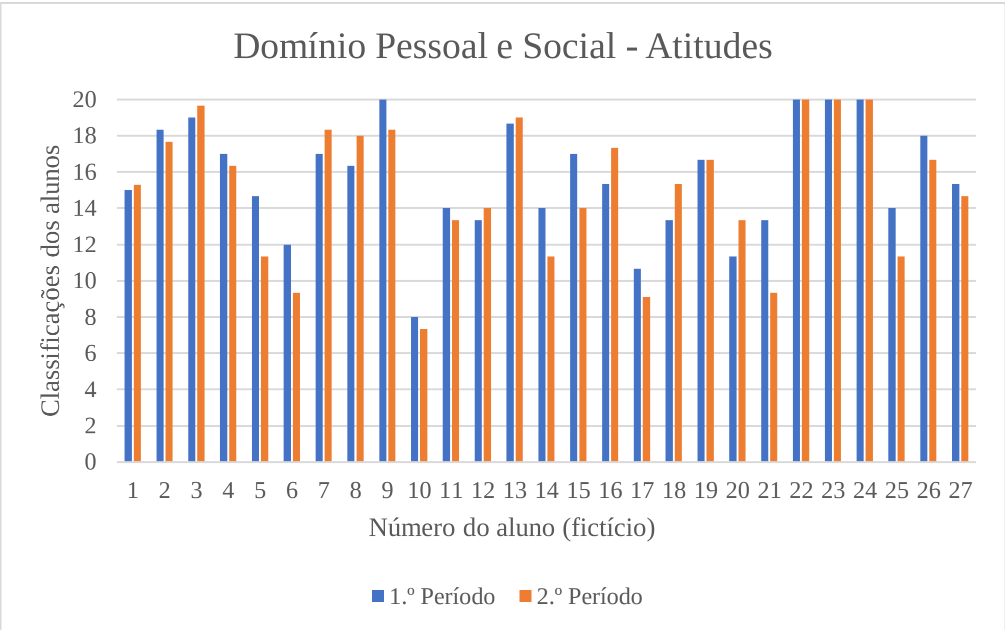


Gráfico 1: Classificações individuais nas Atitudes no 1.º e 2.º período letivo 2023/2024

No entanto, a turma inclui quatro alunos com baixos níveis de concentração, que frequentemente perturbam o ambiente da sala de aula. Essa situação acabou por se agravar no segundo período, o que gerou uma diminuição na qualidade da participação.

Quanto às suas classificações finais no 1.º e 2.º período letivo 2022/2023, a média aproximada foi de doze valores em ambos os períodos. Embora essa média seja relativamente baixa, é importante notar que há uma grande disparidade de valores, como demonstrado no gráfico a seguir: quatro alunos obtiveram classificações superiores a 18 valores, enquanto sete alunos obtiveram classificações inferiores a 10 valores.

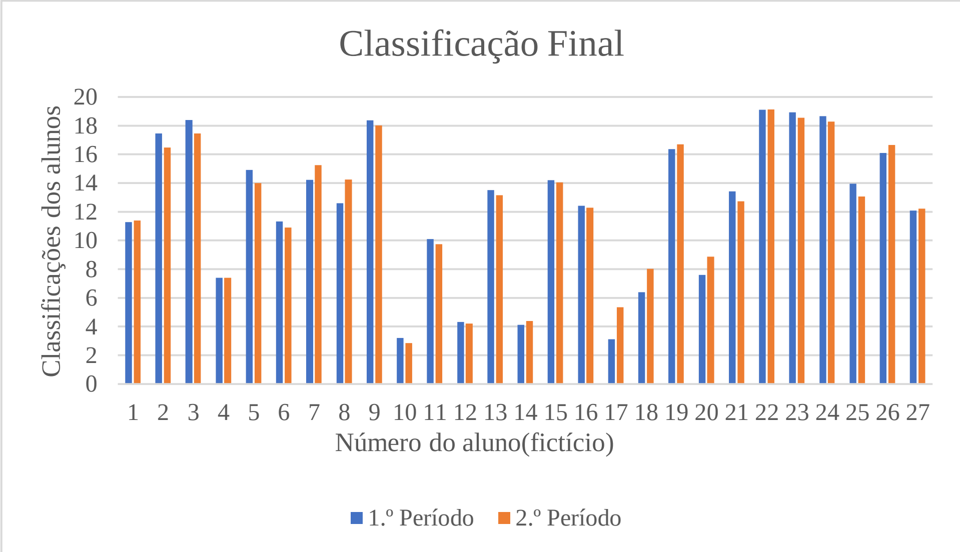


Gráfico 2: Classificações individuais finais no 1.º período letivo 2023/2024

Estas diferenças, contudo, não têm repercussões nos laços de amizade estabelecidos entre os alunos, pois é visível uma genuína preocupação pelos colegas com mais dificuldades, com alguém sempre disposto a ajudá-los. No que diz respeito à participação, apesar de haver alguns momentos de dispersão, é uma turma que costuma participar, seja por iniciativa própria ou por iniciativa do professor.

No processo de planeamento da proposta pedagógica elaborada para este trabalho, importa referir a forma como estava distribuída a carga semanal da disciplina de Matemática A para esta turma.

Tabela 2 - Horário Semanal da turma em Matemática A

	Segunda-feira	**Terça-feira**	**Quarta-feira**	**Quinta-feira**	**Sexta-feira**
10h00 - 11h30			Matemática A		
13h30 - 15h00				Matemática A	
17h00 -18h30	Matemática A				

3.2. Ancoragem da Unidade Didática

O domínio da Geometria no 10.º ano de escolaridade é um desenvolvimento do estudo iniciado no Ensino Básico com a introdução dos referencias cartesianos planos e o estudo das equações cartesianas das retas. Este domínio é essencial para conseguir resolver de forma eficaz problemas na Geometria com recursos puramente analíticos, sendo o seu estudo completado no 11.º ano.

De acordo com as Aprendizagens Essenciais (2018) e com o Programa e Metas Curriculares (2013), neste domínio, os alunos começam por abordar a Geometria Analítica e o Cálculo Vetorial no Plano e depois a Geometria Analítica e o Cálculo Vetorial no Espaço.

No que concerne aos conteúdos contemplados nestes dois documentos curriculares a respeito da subunidade de ensino definida para este estudo, o Cálculo Vetorial no Espaço, estes não apresentam diferenças significativas e são os seguintes:

- Generalização ao espaço dos conceitos e propriedades básicas do cálculo vetorial;
- Equação vetorial da reta no espaço;

A subunidade da Geometria Analítica no Espaço, contudo, é essencial para a aprendizagem do cálculo vetorial, e ambos os documentos referem as mesmas temáticas:

- Referenciais cartesianos ortonormados do espaço;
- Equações de planos paralelos aos planos coordenados;
- Equações cartesianas de retas paralelas a um dos eixos;
- Distância entre dois pontos no espaço;
- Equação do plano mediador de um segmento de reta;
- Equação cartesiana reduzida da superfície esférica;
- Inequação cartesiana reduzida da esfera;

Quantos aos objetivos, nas Aprendizagens Essenciais, estes envolvem a identificação, o reconhecimento, a análise e a aplicação de todos os conteúdos acima referidos, e no Programa e Metas Curriculares (2013), estes são: "Definir referenciais cartesianos do espaço"; "Definir analiticamente conjuntos elementares de pontos do espaço"; "Definir vetores do espaço"; "Operar com coordenadas de vetores do espaço" e "Resolver problemas". Apesar da forma distinta como os objetivos são apresentados, em termos de conceitos, procedimentos e propriedades, não existem diferenças a destacar. No entanto, considero que nas Aprendizagens Essenciais, é dada maior relevância à discussão matemática como prática essencial no desenvolvimento do raciocínio matemático e na identificação de lacunas e dificuldades na aprendizagem. Nesse sentido, durante a planificação da subunidade didática, este foi o meu principal documento orientador.

3.3. Conceitos Matemáticos Envolvidos

Nesta seção, serão abordados os conceitos matemáticos empregues ao longo da minha intervenção letiva. Começo por apresentar uma tabela com a notação utilizada no âmbito do Cálculo Vetorial, e em seguida, revejo os conhecimentos prévios dos alunos na Geometria Analítica no Espaço. Por fim, apresento os conhecimentos introduzidos aos alunos.

Tabela 3: Notação matemática

Notação	Significado
AB	Reta definida pelos pontos A e B
$\dot{A}B$	Semirreta com origem no ponto A, definida pelos pontos A e B
[AB]	Segmento de reta de extremos A e B
$\overline{AB}$	Comprimento do segmento de reta de extremos A e B
$[A, B]$	Segmento de reta orientado de origem A e extremidade B
$\overrightarrow{AB}$	Vetor representado pelo segmento orientado de extremos A e B
$\lVert\overrightarrow{AB}\rVert$	Norma do segmento orientado representante de $\overrightarrow{AB}$

3.3.1. Conhecimentos Prévios

3.3.1.1. Referencial ortonormado no espaço

Fixada uma unidade de comprimento, designa-se, por referencial ortonormado no espaço (ou simplesmente referencial cartesiano no espaço) um terno ordenado de retas numéricas que se intersetam nas respetivas origens, duas a duas perpendiculares, tal que a unidade de comprimento comum coincide com a previamente fixada.

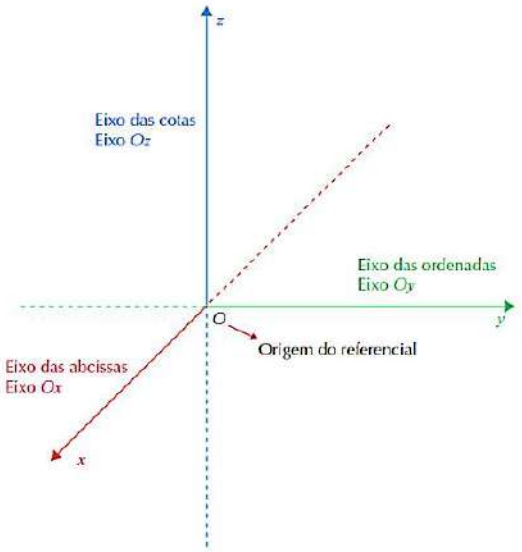


Figura 2: Referencial cartesiano $Oxyz$

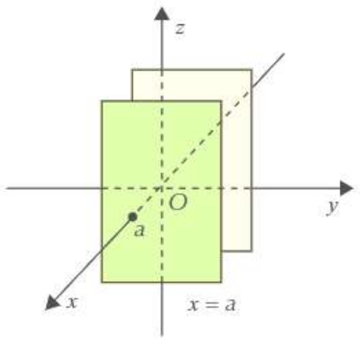
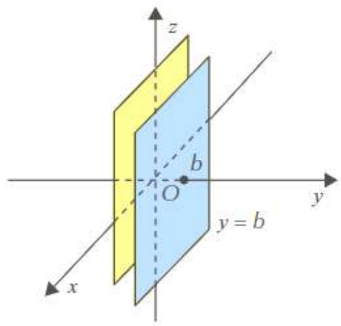
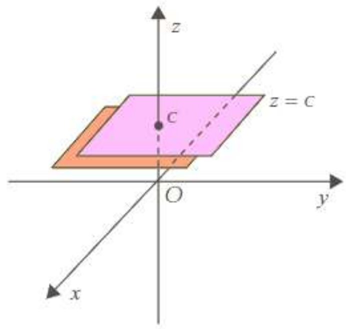
A origem comum das três retas designa-se por origem do referencial e em geral representa-se por O. A primeira reta designa-se por eixo das abcissas, a segunda por eixo das ordenadas e a terceira por eixo das cotas, e representam-se por $Ox, Oy\ e\ Oz$, respetivamente. Cada uma das retas designa-se por eixo coordenado.

3.3.1.2. Coordenadas de um ponto no espaço

Fixado um referencial ortonormado do espaço, a cada ponto, P, conrresponde um terno ordenado de números reais (a, b, c) que são as coordenadas do ponto P e a cada terno ordenado (a, b, c) corresponde um único ponto do espaço.

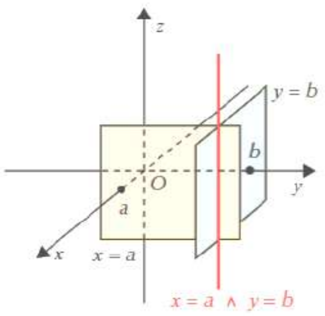
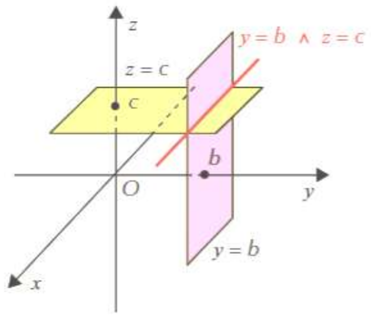
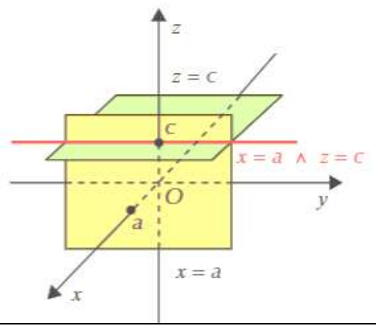
3.3.1.3. Planos paralelos aos planos coordenados

Quadro 1: Planos paralelos aos planos coordenados (Adaptado de Raposo & Gomes, 2021)

$Condição: x = a, a \in R$	$Condição: y = b, b \in R$	$Condição: z = c, c \in R$
		
• Plano paralelo a $y0z$; • Passa pelo ponto $A(a, 0{,}0)$ • Perpendicular ao eixo Ox.	• Plano paralelo a xOz. • Passa pelo ponto $B(0, b, 0)$. • Perpendicular ao eixo Oy.	• Plano paralelo a xOy • Passa pelo ponto $C(0, 0, c)$. • Perpendicular ao eixo Oz.
Caso particular: $x = 0$ define o plano yOz.	Caso particular: $y = 0$ define o plano xOz.	Caso particular: $z = 0$ define o plano xOy.

3.3.1.4. Retas paralelas aos eixos coordenados

Quadro 2: Retas paralelas aos eixos coordenados (Adaptado de Raposo & Gomes, 2021)

$Condição: x = a \wedge \; y = b,$ $a, b \in R$	$Condição: y = b \wedge z = c, c, b \in R$	$Condição: x = a \wedge z = c, a, c \in R$
		
• Reta paralela a Oz e perpendicular ao plano xOy. • Interseta o plano xOy no ponto $(a, b, 0)$.	• Reta paralela a Ox e perpendicular ao plano yOz. • Interseta o plano yOz no ponto $(0, b, c)$.	• Reta paralela a Oy e perpendicular ao plano xOz. • Interseta o plano xOz no ponto $(a, 0, b)$.
Caso particular: $x = 0 \wedge y = 0$ define o eixo Oz.	Caso particular: $y = 0 \wedge z = 0$ define o eixo Ox.	Caso particular: $x = 0 \wedge z = 0$ define o eixo Oy.

3.3.1.5. Distância entre dois pontos no espaço

Fixada uma unidade de comprimento, dado um referencial ortonormado no espaço e dados os pontos $A(a_1,\ a_2,\ a_3)$ e $B(b_1,\ b_2,\ b_3)$, a medida da **distância entre *A* e *B*** é igual a: $\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$

Esta distância representa-se por $d(A, B)$.

3.3.1.6. Plano mediador de um segmento de reta

O plano mediador de um segmento de reta $[AB]$ é o conjunto dos pontos do espaço equidistantes de A e de B.

Sendo $A\ (x_1,\ y_1,\ z_1)$ e $B\ (x_2,\ y_2,\ z_3)$, o plano mediador de $[AB]$ é o conjunto de pontos $P(x, y, z)$ tais que:

$$d(P, A) = d(P, B) \Leftrightarrow (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2$$
$$= (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2$$

Simplificando esta expressão obtém-se uma equação do tipo $ax + by + cz + d \ = \ 0$ que se designa por equação geral do plano mediador.

3.3.1.7. Superfície esférica

A superfície esférica de centro C e raio r é o conjunto dos pontos do espaço cuja distância a C é r (na unidade considerada).

Fixada uma unidade de comprimento, dados um referencial ortonormado do espaço, um ponto C $(c_1,\ c_2,\ c_3)$ e um número $r\ >\ 0$: $(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 +\ (z - c_3)^2 = r^2$ é uma equação cartesiana da superfície esférica de centro C e raio r. Em particular, também se designa por equação (cartesiana) reduzida da superfície esférica.

3.3.1.8. Esfera

A esfera de centro C e raio r é o conjunto dos pontos do espaço cuja distância a C é inferior ou igual a r (na unidade considerada).

Fixada uma unidade de comprimento, dados um referencial ortonormado do espaço, um ponto C $(c_1,\ c_2,\ c_3)$ e um número $r\ >\ 0$: $(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 +\ (z - c_3)^2 = r^2$ diz-se a inequação (cartesiana) reduzida da esfera de centro C e raio r.

3.3.2. Conhecimentos introduzidos

3.3.2.1. Segmentos orientados equipolentes

Dois segmentos orientados no espaço dizem-se equipolentes quando são complanares e equipolentes num plano que os contenha. Como exemplo, na figura 3, os segmentos orientados $[A, B]$ e $[C, D]$ são equipolentes. Estes segmentos orientados determinam o mesmo vetor que poderá ser representado por $\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{CD}$ e tem-se $\overrightarrow{AB}$ = $\overrightarrow{CD}$.

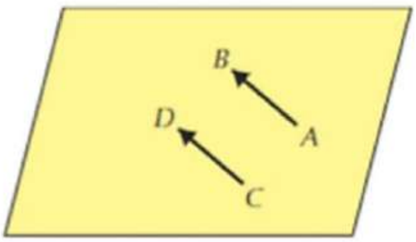


Figura 3: Segmentos orientados no espaço (Adaptado de Raposo & Gomes, 2021).

3.3.2.2. Vetores: do plano ao espaço

As definições de norma de um vetor (fixada uma unidade de comprimento), de adição de um ponto com um vetor, de translação de um dado vetor e as operações de subtração de dois pontos, de adição e subtração de vetores, de multiplicação de um vetor por um escalar e as respetivas propriedades geométricas e algébricas, estendem-se do plano ao espaço.

3.3.2.2.1. Norma de um vetor

A norma de um vetor $\vec{v}$ é a medida de comprimento de um segmento orientado representante de $\vec{v}$, fixada uma unidade. A norma do vetor $\vec{v}$ representa-se por $\|\vec{v}\|$.

3.3.2.2.2. Soma de um ponto com um vetor

Dado um ponto P e um vetor $\overrightarrow{AB}$, existe um único ponto Q tal que:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$$

O ponto Q é a soma do ponto P com o vetor $\overrightarrow{AB}$, ou seja, $Q = P + \overrightarrow{AB}$.

3.3.2.2.3. Translação de um dado vetor

A translação de vetor $\vec{u}$, é a aplicação que a um ponto P associa o ponto $P + \vec{u}$. Representa-se por $T_{\vec{u}}$ e a imagem de P representa-se por $T_{\vec{u}}(P)$.

3.3.2.2.4. Diferença entre dois pontos

Define-se a diferença entre os pontos B e A como sendo o vetor $\overrightarrow{AB}$. Assim, $B - A = \overrightarrow{AB}$.

3.3.2.2.5. Adição de Vetores: Regra do paralelogramo e Regra do Triângulo

Dados quaisquer dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, há sempre um plano que contém representantes dos dois vetores e, portanto, os dois processos para adicionar vetores no plano mantém-se válidos para adicionar vetores no espaço.

Exemplo no plano

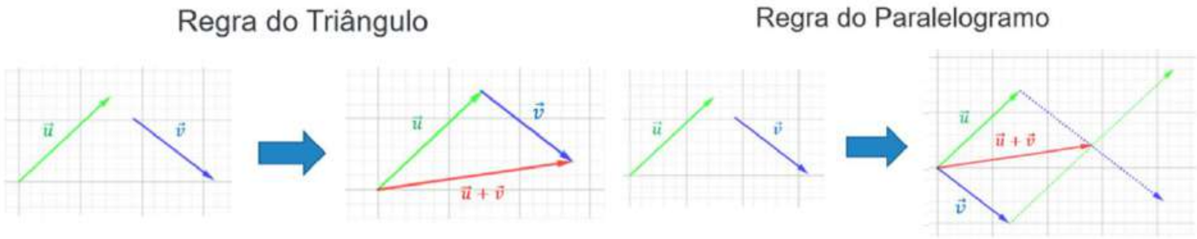


Figura 4: Exemplo da Regra do Triângulo e da Regra do Paralelogramo no plano.

Exemplo no espaço

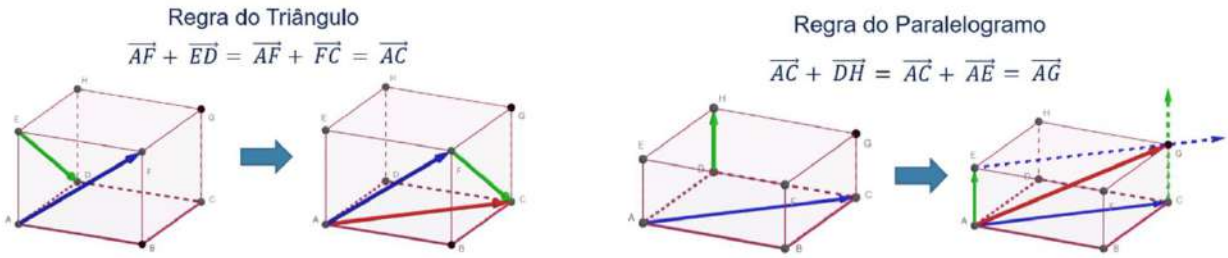


Figura 5: Exemplo da Regra do Triângulo e da Regra do Paralelogramo no espaço.

3.3.2.2.6. Diferença de dois vetores

Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, existe um único vetor $\vec{w}$, tal que $\vec{w} + \vec{v} = \vec{u}$. Esse vetor é dado por $\vec{w} = \vec{u} + (-\vec{v})$ e $\vec{w}$ designa-se por vetor-diferença de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

3.3.2.2.7. Produto de um número real por um vetor

Chama-se produto de um número real $\lambda \neq 0$ por um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$, e representa-se por $\lambda\vec{v}$, ao vetor com as seguintes características:

- Direção igual à do vetor $\vec{v}$;
- Sentido igual ao de $\vec{v}$ se $\lambda > 0$ e sentido contrário ao de $\vec{v}$ se $\lambda < 0$;
- $\|\lambda\vec{v}\| = |\lambda| \times \|\vec{v}\|$

Se $\lambda = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ define-se o produto $\lambda\vec{v}$ como sendo o vetor nulo: $\lambda\vec{v} = \vec{0}$.

3.3.2.3. Coordenadas de vetores no espaço

Fixado um referencial ortonormado no espaço de origem O, sejam $X(1,0,0), Y(0,1,0), Z(0,0,1)$, $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{OY}$ e $\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{OZ}$. Dado um qualquer vetor $\vec{v}$, existe um e um só terno ordenado (a, b, c) de números reais tais que $\vec{v} = a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}$.

O terno ordenado $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ designa-se por uma base do espaço vetorial dos vetores no espaço, pelo facto de satisfazer aquela propriedade. O terno ordenado (a, b, c) designa-se por coordenadas do vetor $\vec{v}$ na base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$.

Representa-se o vetor $\vec{v}$ de coordenadas (a, b, c) por $\vec{v}$ (a, b, c) ou $\vec{v} = (a, b, c)$.

3.3.2.4. Operações com vetores no espaço a partir das suas coordenadas

3.3.2.4.1. Igualdade de vetores

Sejam $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$.

$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow (u_1, u_2, u_3) = (v_1, v_2, v_3) \Leftrightarrow u_1 = v_1 \wedge u_2 = v_2 \wedge u_3 = v_3$

3.3.2.4.2. Soma e diferença de vetores

Sejam $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$.

$\vec{u} + \vec{v} = (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$

$\vec{u} - \vec{v} = (u_1, u_2, u_3) - (v_1, v_2, v_3) = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3)$

3.3.2.4.3. Multiplicação de um vetor por um escalar

Sejam $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ um vetor no espaço e λ um número real. Verifica-se que:

$\lambda\vec{u} = \lambda\,(u_1, u_2, u_3) = (\lambda u_1,, \lambda u_2, \lambda u_3)$

Se $\lambda = -1$, temos o simétrico de um vetor:

$-\vec{u} = (-u_1, -u_2, -u_3)$.

3.3.2.4.4. Vetores colineares

- $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}: \vec{u} = k\vec{v}$

- Sejam $\vec{u}(u_1, u_2,\ u_3)$ e $\vec{v}(v_1, v_2,\ u_3)$ vetores sem coordenadas nulas. Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares se e só se $\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3}$.
- Sejam $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v}(v_1, v_2, u_3)$ vetores não nulos:
  - Se $\vec{u}$ tem duas coordenadas nulas, então $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares se e só as coordenadas correspondentes de $\vec{v}$ também forem nulas.
  - Se $\vec{u}$ tem uma e uma só coordenada nula, então $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares se e só se a coordenada correspondente de $\vec{v}$, e só essa, também for nula e as restantes coordenadas forem diretamente proporcionais.

3.3.2.4.5. Diferença de dois pontos e Soma de um ponto com um vetor

Sendo $A(x_1, y_1,\ z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$ dois pontos do espaço e $\vec{w}(a, b, c)$.

$\overrightarrow{AB}$ = $B - A = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

A + $\vec{w} = (x_1, y_1,\ z_1)$ + (a, b, c) = $(x_1 +\ a, y_1 + b, z_1$+ c)

3.3.2.4.6 Norma de um vetor

Seja $\vec{w}(a, b, c)$, tem-se que: $\|\vec{w}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

3.3.2.5 Equação Vetorial de uma reta no espaço

Dados um ponto $A(x_1, y_1, z_1)$ e um vetor $\vec{v}\ (v_1, v_2, v_3\ )$ uma equação vetorial da reta que passa em A e tem a direção de $\vec{v}$ é:

$$P = A + k\vec{v}, k \in\ \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + k(v_1, v_2, v_3\ ),\ k \in \mathbb{R}$$

Ao vetor $\vec{v}$ chama-se **vetor diretor da reta**.

3.3.2.6. Equações paramétrica da reta

Partindo da equação vetorial: $(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + k(v_1, v_2, v_3\ ),\ \ k \in \mathbb{R}$, obtém-se o sistema de equações paramétricas da reta:

$$\begin{cases} x = x_1 + kv_1 \\ y = x_2 + kv_2 \ , k \in \mathbb{R} \\ z = x_3 + kv_3 \end{cases}$$

3.4. Estratégias de Ensino

Durante a minha intervenção letiva, pretendo promover o raciocínio matemático, em particular o processo central do desenvolvimento da compreensão conceptual, a justificação (NCTM, 2007). Deste modo, e também de acordo com o objetivo deste estudo, a estratégia que irei definir para as minhas aulas será predominantemente de caráter exploratório.

Tal como já foi referido, na abordagem exploratória, a aula divide-se, essencialmente, em três fases: introdução da tarefa, realização da tarefa, e discussão e sistematização das aprendizagens. Na primeira fase, o meu principal objetivo será apresentar a tarefa e explicar à turma como irá decorrer a aula, desta forma irei pedir aos alunos para lerem as questões, de modo a poder esclarecer quaisquer dúvidas relacionadas à interpretação dos enunciados, e também irei anunciar que a tarefa é para ser resolvida em grupo, uma vez que "proporciona a possibilidade de uma interação significativa entre os alunos, que podem trocar impressões entre si, com vista à realização da tarefa proposta" (Ponte et al., 1997). Na última aula da intervenção letiva, no entanto, será pedido para os alunos resolverem uma ficha de trabalho individualmente, com o objetivo de comparar se os níveis de desempenho e participação se mantiveram.

Na segunda fase, irei monitorizar o trabalho autónomo dos alunos, tomando nota das suas estratégias de resolução e raciocínios e utilizar o questionamento como principal ferramenta para ajudar os alunos com dificuldades, pois este método além de encorajar os alunos a refletirem acerca da sua resolução, também previne diminuir o grau cognitivo da tarefa (Canavarro, 2011; NCTM, 2017).

Nas discussões coletivas, irei projetar algumas estratégias de resolução dos alunos no quadro, de forma a promover uma confrontação de ideias, e a clarificação de raciocínios. O ponto-chave destes momentos será encorajar os alunos a partilharem as suas ideias e a justificá-las, nesse aspeto é necessário que formule "questões que dirijam o discurso oral e escrito na direção do raciocínio matemático", principalmente através de perguntas de inquirição, visto que estas procuram que o aluno reflita e explicite o seu raciocínio ao ser convidado a comunicá-lo e a esclarecê-lo aos seus colegas e professor (NCTM, 1994; Ponte & Serrazina, 2000).

Deste modo, o ensino exploratório permite aos alunos um grande protagonismo, pois a aprendizagem não decorre de "ouvir directamente o professor (...) mas sim da reflexão realizada pelo aluno a propósito da actividade que realizou" (Ponte, 2005). Nesse sentido, considero que esta estratégia não só é mais propícia para desenvolver o raciocínio matemático dos alunos, mas também para a sua compreensão e fluência matemática.

A planificação anual da disciplina de Matemática A da Escola Secundária Rainha Dona Leonor realizada pelo professor cooperante, definiu 18 tempos letivos (45 minutos) para a subunidade didática lecionada, que inclui a realização de uma Questão-Aula de avaliação sumativa. Na tabela seguinte apresento a planificação da subunidade, com as datas das aulas, a sua duração, os objetivos principais de aprendizagem e os recursos.

Tabela 4: Planificação geral das Aulas

Aulas	Duração (minutos)	Objetivos	Fichas de trabalho e outros recursos
1.Dia 08/02/2023	90	Estender as propriedades geométricas e algébricas de vetores no plano ao espaço.	*PowerPoint* *Geogebra* Manual *Máximo 10* Quadro branco
2.Dia 09/02/2023	90	Reconhecer, analisar e operar com coordenadas de vetores no espaço.	*PowerPoint* Ficha de trabalho A Quadro branco
3.Dia 13/02/2023	90	Aplicar conceitos e propriedades geométricas e algébricas de vetores na resolução de problemas.	PowerPoint Ficha de trabalho B *Geogebra* Quadro branco
4.Dia 15/02/2023	90	Estender as definições e propriedades das equações vetoriais de retas no plano ao espaço. Reconhecer, analisar e aplicar na resolução de exercícios a equação vetorial de uma reta no espaço.	PowerPoint Quadro branco
5.Dia 16/02/2023	90	Reconhecer, analisar e aplicar as definições e propriedades das equações vetoriais de retas e colinearidade de vetores.	PowerPoint Ficha de trabalho C Quadro branco
6.Dia 23/02/2023	90	Estabelecer conexões entre o cálculo vetorial e a equação reduzida de uma superfície esférica.	PowerPoint Ficha de trabalho D Quadro branco
7.Dia 27/02/2023	90	Reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas propriedades das equações vetoriais e sistemas de equações paramétricas.	Ficha de trabalho E Quadro branco PowerPoint
8.Dia 01/03/2023	90	Reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas propriedades das equações vetoriais e sistemas de equações paramétricas	PowerPoint Ficha de trabalho F Quadro branco
9. Dia 06/03/2023	90	Questão-Aula sobre a subunidade didática de Cálculo Vetorial no Espaço	

3.5. Tarefas

Ao longo da minha intervenção letiva, realizei fichas com exercícios, problemas e com questões de caracter exploratório.

A resolução de problemas surge tanto no Programa e Metas Curriculares de Matemática A do Ensino Secundário (2013), como nas Aprendizagens Essenciais de Matemática A do 10.º ano de escolaridade (2018), como uma competência fundamental a ser desenvolvida em qualquer domínio, sendo constantemente destacada e definida, no fim de qualquer unidade de ensino, como um objetivo de aprendizagem.

O NCTM (2017), também salienta a importância dos "problemas" ao referir que este tipo de tarefas permite desenvolver o raciocínio matemático dos alunos, ao criar oportunidades para eles estabelecerem conexões entre conceitos, representações e ideias matemáticas subjacentes, no intuito de formular e aplicar procedimentos não rotineiros.

A diferença entre os exercícios e os problemas reside na capacidade do aluno de resolvê-los de maneira imediata. Os exercícios são projetados com um nível de desafio mais baixo e uma estrutura mais definida, com o objetivo de reforçar conhecimentos e avaliar a compreensão dos conceitos fundamentais da unidade didática (Ponte, 2005).

Quanto às questões de natureza exploratória, estas destacam-se por serem particularmente importantes na promoção de processos de raciocínio matemático, como a justificação (Ponte, 2007) e conduzir os alunos a compreender a necessidade de justificarem as suas conjeturas (Henriques, 2010).

Assim, tendo em conta o objetivo deste estudo e também os objetivos de aprendizagens presentes no Programa e Metas Curriculares e nas Aprendizagens Essenciais sobre o domínio da Geometria no Espaço, propus aos alunos a realização de seis fichas, duas com questões exploratórias e três dedicadas à resolução de problemas, pois estes tipos de questões além de promover o desenvolvimento do raciocínio matemático, também conduzem à compreensão de conceitos, propriedades e procedimentos matemáticos (Ponte, 2005; Mata-Pereira, 2018). Os exercícios também vão estar presentes nessas fichas, mas com o intuito de consolidar conhecimento.

Importa salientar que estas fichas foram elaboradas seguindo os princípios definidos no Projeto Raciocínio Matemático e Formação de Professores para promover a justificação (REASON, 2020).

De seguida, respeitando a ordem pela qual foram propostas aos alunos, irei descrever com mais detalhe as fichas de trabalho propostas.

3.5.1. Ficha de trabalho A

Esta ficha, inicialmente era para ser constituída só por dois exercícios: um sobre a colinearidade de vetores, onde seria solicitado aos alunos para verificarem, entre quatro vetores, quais os pares eram colineares e, em caso afirmativo, indicassem com a devida justificação, qual o seu sentido. O outro exercício envolvia os alunos indicarem o valor lógico de uma afirmação, onde seria necessário os alunos aplicarem os seus conhecimentos sobre a adição de vetores, colinearidade de vetores, coordenadas de eixos coordenados e propriedades do cubo para resolverem a questão.

Após a primeira aula, no entanto, ficou claro que a maioria dos alunos já estava familiarizada com os conceitos e procedimentos relacionados a esses tópicos. Portanto, decidi adicionar uma terceira questão, denominada questão número 1, mantendo os dois exercícios originais como questão 2 e questão 3. Quanto a estas últimas questões, decidi as manter, porque considerei serem necessárias para consolidar o conhecimento dos alunos com mais dificuldades, e poder distinguir as fragilidades básicas de cada um.

A ideia para a questão 1 surgiu durante correção da questão 9.3, página 36 do *Manual Máximo 10*, explicita no Plano de Aula do dia 8 de fevereiro de 2013 (Anexo 01), quando os questionei se seria possível obter os mesmos resultados se calculasse primeiro a norma de cada um dos vetores e depois somasse. Esta pergunta deixou vários alunos a questionar-se sobre o porquê da resposta à minha pergunta ser negativa, e nesse sentido, elaborei uma questão de caracter exploratório, onde os alunos teriam que indicar e justificar em que condições se verificava a igualdade $\left\|\vec{a}+\vec{b}\,\right\| = \|\vec{a}\| + \left\|\vec{b}\right\|$. Para responder corretamente a esta questão, os alunos teriam que identificar que a igualdade apenas se verificava para quaisquer pares de vetores colineares com o mesmo sentido ou quando pelo menos um dos vetores é o vetor nulo, e justificar a generalização realizada. Dessa forma, os alunos seriam desafiados a empregar pelo menos dois processos de raciocínio: a generalização e a justificação. Adicionalmente, devido à natureza da questão, acreditei que ela seria propícia a resoluções com representações matemáticas distintas. Isso, por sua vez, possibilitaria uma compreensão mais aprofundada dos alunos em relação aos conceitos abordados, pois eles teriam a oportunidade de discutir as semelhanças e diferenças entre essas representações (NCTM, 2017).

3.5.2 Ficha de Trabalho B

A ficha B trata-se de um problema com duas questões. A dificuldade desta ficha deve-se a ser fundamental que os alunos apliquem seus conhecimentos prévios sobre altura e volume de pirâmides, em conjugação com os conhecimentos introduzidos sobre vetores.

Na primeira questão, é pedido aos alunos para determinarem as coordenadas de dois pontos definidos na pirâmide e as coordenadas de um vetor. Os alunos terão de aplicar as regras geométricas e algébricas da adição de vetores, a soma de um ponto com um vetor, e a diferença entre dois pontos, em constante relação com as propriedades da pirâmide, para conseguir responder à pergunta.

A segunda questão, envolve a identificação e justificação do valor lógico de uma afirmação. Pretende-se que os alunos comecem por determinar as coordenadas dos pontos O e P, sabendo que qualquer pirâmide regular é uma pirâmide reta, o que por sua vez permite concluir que a altura da pirâmide corresponderá à distância do vértice ao centro da base. Tendo, também, em atenção que a pirâmide $[EFGHV]$ é regular, por esta ser obtida através da interseção de um plano paralelo à base $[ABCD]$. Em seguida, com as coordenadas do ponto O e as de R(definidas no enunciado), os alunos devem determinar a medida das arestas da base $[ABCD]$, calculando o dobro da norma do vetor $\|\overrightarrow{OR}\|$, visto que O é centro da base $[ABCD]$ e R é ponto médio do segmento $[CB]$. Por fim, com os valores anteriores calculados, basta determinar o volume da pirâmide $[ABCDV]$ e $[EFGHV]$ e obter a respetiva diferença, para calcular o volume do tronco de pirâmide $[ABCDEFGH]$. Este volume será superior a $100cm^3$, visto que possui uma capacidade de $104cm^3$, e, portanto, a afirmação expressa no enunciado é falsa.

Assim, os alunos terão que na sua justificação explicitar diversas propriedades e procedimentos relacionados ao cálculo vetorial e às pirâmides, para conseguirem realizar uma justificação válida e completa.

3.5.3 Ficha de Trabalho C

A ficha de trabalho C acontece depois de ter introduzido a definição e propriedades da equação vetorial de uma reta no espaço, e ter resolvido alguns exemplos com os alunos onde se pedia para averiguar se determinado ponto pertencia a uma dada reta. Assim, nenhuma das questões presentes tinha um grau de exigência elevado (Ponte, 2005).

A questão 1a) está intrinsecamente relacionada à definição e propriedades da equação vetorial de uma reta, visto que para responder acertadamente à pergunta era preciso ter interiorizado que é possível representar uma mesma reta com equações vetoriais distintas. Neste caso, desde que o ponto utilizado seja um ponto qualquer da reta AB, e o vetor seja colinear ao vetor $\vec{u}$, qualquer equação vetorial escrita nestas condições está a representar a reta que passa em A e tem a direção do vetor $\vec{u}$. Quanto ao facto de ter iniciado a questão por “Existe uma única”, em vez de ter perguntado diretamente se havia múltiplas formas de escrever uma equação vetorial para representar uma mesma reta, deve-se a querer saber se os alunos teriam dificuldades em compreender que apenas basta apresentar um contraexemplo para refutar a afirmação. Isto porque, em discussão com a Professora Coordenadora Maria Torres, constatei que é habitual os alunos terem facilidade em usar contraexemplos para refutar uma afirmação com contornos gerais, mas quando é necessário provar o contrário da unicidade, já não têm a mesma espontaneidade. Assim, com esta questão, também viso compreender se os participantes deste estudo, revelam ter essa dificuldade quanto às situações que podem usar contraexemplos.

As questões 1b) e 1c), tratam-se de exercícios apenas para os alunos treinarem os procedimentos introduzidos em *PowerPoint*, sendo que não limitei as questões ao uso exclusivo das equações vetoriais, de modo a proporcionar uma maior variedade de estratégias de resolução, e assim estabelecer conexões entre as equações paramétricas e as vetoriais. Na questão 1b), o mais importante era compreender que se, por exemplo, o vetor usado fosse o $\vec{u}$, havia diferenças entre utilizar o ponto A, ou o ponto B para definir o segmento de reta $[AB]$, pois o intervalo definido para o parâmetro k, teria que ser num caso $[0,1]$ e no outro $[-1,0]$. Em seguida, essa observação seria estendida para outros pontos e vetores. Adicionalmente, para depois averiguar se o ponto P pertencia a $[AB]$, os alunos teriam de aplicar o procedimento de verificar se o ponto pertencia à reta, e caso pertencesse, comparar o valor de k obtido, com o intervalo definido na equação vetorial do segmento de reta $[AB]$, para concluir se o ponto pertencia ao segmento de reta em específico.

Na questão 1c), o desafio era os alunos saberem que se um ponto qualquer do eixo Ox tem ordenada e a cota iguais a zero, basta verificar se existe um único valor real $k \in \mathbb{R}$, tal que: $(x, 0,0) = (-1,1,3) + k(2, -1,3)$. Considerei que esta questão fosse importante para a aprendizagem dos alunos, porque na ficha A revelaram dificuldades na parte relacionada aos eixos coordenados, por isso queria verificar se essas dificuldades continuavam a ocorrer na temática da equação vetorial.

A questão 2 é constituída por seis alíneas, sobre as quais os alunos teriam que indicar o seu valor lógico e justificar. Na questão 2.a) era necessário conhecer as propriedades do vetor nulo, na questão 2.b) as propriedades do vetor simétrico e na questão 2.c) as propriedades da igualdade de vetores. Com a questão 2.d) pretendo introduzir a lógica associada ao método de redução ao absurdo, uma vez que já vi surgir esta estratégia de forma espontânea em aula, mas em conversas com alunos, percebi que alguns desconhecem que esta forma de justificação é válida. Assim, nesta questão, é possível justificar a sua veracidade apresentando uma justificação por absurdo, exemplificada na seguinte figura, ou através da relação entre os vetores serem colineares e a extremidade de um vetor coincidir com a origem do outro. A 2.e) trata-se do recíproco da afirmação presente na alínea anterior, e tinha como objetivo averiguar se os alunos compreendiam a diferença entre as afirmações e se utilizavam um tipo distinto de justificação. A questão 2.f) é semelhante à 2.d), mas os vetores são representados por pontos distintos, e, portanto, basta refutar a afirmação com um contraexemplo.

> **d)** Verdadeira. Por absurdo, se os pontos A, B e C não estivessem na mesma reta, então seria possível definir o triângulo $[ABC]$, no entanto, os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ não poderiam ser colineares.

Figura 6: Resolução da Questão 2d) da Ficha de trabalho C

3.5.4. Ficha de Trabalho D – Parte I

A ficha de trabalho D - Parte I foi desenvolvida por dois motivos específicos. O primeiro motivo decorre do último princípio estabelecido no Projeto REASON, que busca promover a justificação ao "incluir questões que solicitem ou incentivem a análise por parte do aluno de justificações apresentadas por outros". O segundo motivo está relacionado ao facto de que, na resolução da questão 2.d) da ficha de trabalho C, os alunos apresentaram diversas justificações inválidas e incompletas. Nesse contexto, pretendo que com esta ficha os alunos reconheçam os aspectos essenciais de uma justificação válida e completa, e consigam avaliar a própria justificação e melhorá-la.

A ficha trata-se de uma adaptação da tarefa denominada "Vamos comparar áreas de retângulos", esta observada durante as aulas da unidade curricular de Metodologia do Ensino da Matemática.

3.5.5. Ficha de Trabalho D – Parte II

Nesta ficha pretende-se que os alunos apliquem os seus conhecimentos prévios acerca da superfície esférica e os relacionem com os conhecimentos introduzidos sobre o cálculo vetorial no espaço. Na 1.a), para os alunos justificarem que $[PQ]$ é diâmetro, devem apresentar duas das seguintes razões:

- A medida do segmento de reta $[PQ]$ é igual ao dobro do raio da superfície, valor esse que pode ser obtido pela equação reduzida da superfície esfera;
- O centro de S pertence ao segmento de reta mencionado;
- O ponto P e Q pertencem ambos à superfície esférica.

Portanto, trata-se de uma questão, que embora baseada em propriedades e procedimentos específicos, permite uma variedade de estratégias de resolução, o que a torna mais propício para o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Na 1.b), pretende-se que os alunos generalizem o resultado obtido na 1.a) e justifiquem essa generalização. Portanto, assim como na questão 1 da ficha de trabalho A, aqui também é suposto que os alunos apliquem os processos de generalização e justificação. Esta questão para os alunos, em princípio será simples, porque já lhes foi feito uma pergunta semelhante no 2.º Período, mas no plano. Deste modo, presumo que caso haja dificuldades, continue a ser nos processos de raciocínio mencionados.

A última questão é de natureza exploratória, e os alunos já terão que partir das propriedades da superfície esférica e do plano mediador para conseguirem justificar que T pertence à superfície esférica R, quando o centro de R e o ponto de coordenadas $(0,0,0)$ fazem parte do plano mediador $[WT]$.

3.5.6. Ficha de trabalho E

A ficha de trabalho E trata-se de um problema onde os alunos teriam de aplicar os seus conhecimentos sobre propriedades da equação vetorial de uma reta, da superfície esférica/esfera e do plano mediador.

Na questão 1.1 os alunos devem determinar os pontos de interseção entre a equação vetorial que descreve a trajetória retilínea do cachalote e a superfície esférica que representa o limite do radar. Obtida as coordenadas do ponto de interseção, para os alunos responderem corretamente à questão, é necessário que as interpretem, com base no contexto do problema. Esta questão ganha destaque por ser um tópico novo para os alunos e, ao mesmo tempo, permite avaliar se a maioria dos alunos terá a sensibilidade necessária para compreender que os valores das coordenadas de localização do cachalote obtidos não são apropriados dentro do contexto da situação.

Na questão 1.2a), os alunos terão que interpretar que para obter a localização da mina vão ter que calcular o ponto de interseção entre o plano mediador do segmento de reta $[NS]$ e a equação vetorial que define a trajetória do torpedo. Portanto, é mais outra questão sobre cálculo de pontos de interseção, mas desta vez com o plano mediador.

Na questão 1.2b), os alunos devem interpretar que para determinarem se a embarcação é atingida devem primeiro calcular se a embarcação se encontra na trajetória do torpedo.

3.5.7. Ficha de trabalho F – Parte I

A ficha de trabalho F – Parte I advém das dificuldades sentidas por alguns alunos a interpretar a última questão da ficha de trabalho E, e por ter havido alunos com a resposta correta, mas com erros na sua resolução, ou com justificações inválidas ou incompletas. Assim, com o intuito de responder às dúvidas dos alunos e apoiá-los na identificação dos erros, e fatores a melhorar, decidi discutir com os alunos três resoluções que abrangem os erros e conceitos matemáticos envolvidos.

3.5.8. Ficha de trabalho F - Parte II

Como era a minha última aula e ainda não tinha sido solicitado aos alunos para resolver uma questão onde a interseção de uma reta com uma superfície esférica resultasse em dois pontos, decidi adaptar a questão 1.1 da Ficha de trabalho E e criar a questão 1.1 da ficha de tralho F – Parte II. Além disso, pretendo comparar se haverá diferenças significativas na qualidade da justificação entre as duas questões anteriormente mencionadas, devido à ficha E ter sido realizado em grupo, e a presente ficha realizada individualmente. Assim, o enunciado do problema é igual, mas a questão é diferente, para evitar que a dificuldade de interpretação do enunciado fosse um fator.

As outras duas questões que compõem a ficha, destinam-se aos alunos que conseguirem terminar a questão anterior antes da aula terminar. A questão 1.2 envolve o uso de uma equação cartesiana e a 1.3 é sobre condições no plano. Portanto, questões que não são relativas à subunidade de ensino que propus lecionar, mas que na última aula, considerei que seria interessante para os alunos observarem como é possível criar uma ficha, em que domínio da Geometria Analítica e do Cálculo Vetorial no plano e no espaço se encontrem.

3.6. Recursos

Os recursos utilizados para a lecionação desta unidade didática são as fichas impressas em papel, o quadro, o computador e o projetor existentes nas salas, o meu telemóvel e o bloco de notas pessoal.

Em relação a programas tecnológicos foi utilizado o *Geogebra*, no entanto este apenas foi utilizado por mim, pois não existiu a possibilidade de haver um computador para cada aluno. Ainda assim, considero que esta ferramenta foi fundamental na unidade de ensino definida para o estudo, pois permitiu desenvolver duas capacidades de visualização especial: a "constância perceptual" (capacidade de reconhecer figuras geométricas em diversas posições, tamanhos, contextos e texturas) e a "percepção da posição no espaço" (capacidade para distinguir figuras iguais, mas colocadas com orientações diferentes) (Ponte & Serrazina, 2000). Estas duas capacidades são essenciais no 10.º ano de escolaridade, onde uma das maiores dificuldades dos alunos é a visualização de objetos a três dimensões (Monteiro, 2018). Além disso, a utilização de um ambiente de geometria dinâmica é um recurso que desperta a curiosidade e interesse dos alunos, promovendo um maior envolvimento durante a aprendizagem dos conteúdos (Breda et al., 2013).

3.7. Avaliação

Na minha intervenção letiva a avaliação teve uma componente essencialmente formativa e foi realizada através da recolha, análise e devolução das produções escritas dos alunos com fornecimento de *feedback* escrito, bem como do questionamento oral durante os momentos de trabalho autónomo e discussão.

Existem várias investigações que sustentam a importância do feedback na regulação das aprendizagens, segundo Fernandes (2005), o feedback é uma ferramenta fundamental para que os discentes sejam motivados a desenvolver constantemente as suas aprendizagens, uma vez que é através desta forma de comunicação que os alunos tomam consciência acerca do seu desempenho, nomeadamente quais os aspetos positivos e quais têm de melhorar, e o professor fornece apoio no sentido de os ajudar a ultrapassar essas dificuldades. No entanto, é necessário ter em atenção que este processo se reveste de uma enorme complexidade, não sendo qualquer tipo de escrita ou questão oral que assegura a natureza reguladora desta forma de comunicação (Santos, 2008), pois produzir feedback escrito e oral que não seja vago e ao mesmo tempo não reduza o grau cognitivo da tarefa, não é uma competência que seja rapidamente adquirida, visto que este deve ser diversificado e adequado a cada aluno (Bruno, 2006; Santos, 2008).

Assim, o motivo pelo qual adotei esta avaliação deve-se não só à relevância do feedback no contributo da melhoria das aprendizagens dos alunos, mas também à consciencialização de que a simples integração do feedback na rotina das aulas, pode desempenhar um papel fulcral na relação que se estabelece entre o aluno e o professor. Nesta perspetiva, o docente promove uma interação de cooperação e de genuína preocupação pelas aprendizagens dos discentes, de modo a criar uma relação de confiança que permita que estes não sintam vergonha de expor as suas dificuldades, pois se os erros só forem detetados na altura da classificação, estamos a privar o aluno da oportunidade de melhorar o seu desempenho, e de ter uma avaliação mais justa e equitativa.

A outra componente de avaliação usada foi a sumativa, com a administração da Questão-Aula, cujo principal objetivo era avaliar os seus conhecimentos sobre o cálculo vetorial no espaço, sendo esta composta por uma questão com sete alíneas.

A questão envolvia um cubo representado num referencial o.n $Oxyz$, sobre o qual se conhecia as coordenadas de três vértices. Na primeira alínea pretendia-se que os alunos aplicassem as operações com coordenadas de vetor e determinassem as coordenadas de um ponto. Na segunda alínea, os alunos tinham que determinar uma equação vetorial para uma dada reta definida por dois vértices do cubo. Na terceira, com base na equação vetorial definida na alínea anterior, os alunos teriam que determinar as coordenadas do ponto de interseção entre a reta e um plano coordenado, sendo para isso necessário usar as equações paramétricas da reta. Na quarta alínea, os alunos tinham que determinar o valor lógico de uma afirmação e justificar. A dificuldade dessa alínea é a interpretação do intervalo definido para o parâmetro k. Na quinta alínea, era dado uma equação geral de uma superfície esférica S e os alunos teriam que determinar a equação reduzida, para conseguiram indicar as coordenadas do centro de S. Na sexta alínea, os alunos deviam justificar se o segmento de reta de extremidades D e H é raio, sendo para isso era necessário apresentar uma das duas seguintes razões, visto que o ponto D é centro da superfície esférica:

- A medida do segmento de reta $[DH]$ é igual ao do raio da superfície, valor esse que pode ser obtido pela equação reduzida da superfície esfera;
- O ponto H pertence à superfície esférica.

Na última alínea os alunos teriam que calcular outro ponto de interseção, mas desta vez entre uma reta e uma superfície esférica. A dificuldade desta questão era os alunos definirem a direção da reta, uma vez que apenas é dito que a reta é paralela ao eixo Ox.

A avaliação sumativa, conforme definido por Lopes e Silva (2012), envolve um juízo de valor com função certificativa. Esta fornece apenas uma visão limitada das capacidades dos alunos em condições específicas, geralmente envolvendo trabalho individual com prazo limitado e resultando em uma nota quantitativa final. Ela é externa ao processo de ensino-aprendizagem, baseando-se nos produtos dos alunos e tem uma ligação com a prestação de contas, como afirma Semana e Santos (2008). Ainda assim, esta componente também permite ter uma noção de quais foram aprendizagens dos alunos no final da unidade didática, e foi, sobretudo, por esta razão que a questão-aula foi elaborada.

4. MÉTODOS E PROCEDIMENTOS DE RECOLHA DE DADOS

Neste capítulo, começo por expor as principais opções metodológicas adotadas para desenvolver a parte investigativa deste trabalho. Em seguida, caracterizarei os participantes envolvidos no estudo, bem como os métodos de recolha e de análise de dados. Por fim, faço uma referência às questões de natureza ética.

4.1. Opções Metodológicas

O objetivo deste trabalho passa por compreender o contributo da abordagem exploratória nas justificações dos alunos. Pretendeu-se observar e analisar as resoluções dos alunos, as interações durante o trabalho autónomo, as suas participações nas discussões coletivas e as respostas à entrevista. Deste modo, segui um paradigma interpretativo.

Quanto à abordagem adotada, como os dados recolhidos foram em ambiente de sala de aula, em contacto direto com os alunos, com a intenção de compreender quais características da abordagem exploratória podem ter desenvolvido as justificações dos alunos, segundo Bogdan e Biklen (1994), estas características permitem definir a abordagem como qualitativa.

Com este estudo, enquanto professor e investigador, pude percecionar as emoções dos alunos e as suas reações à metodologia de trabalho, o que me auxiliaram a realizar uma análise mais fidedigna dos dados e a resolver problemas decorrentes da organização das aulas. No entanto, isto exigiu uma enorme dedicação, por ter que me desdobrar em dois papéis que embora não antagónicos, pois a investigação sobre a própria prática é “uma atividade de grande valor para o desenvolvimento profissional dos professores que nela se envolvem ativamente” (Ponte, 2002), é preciso haver uma devida adequação da calendarização das aulas, com o objetivo do trabalho.

4.2. Participantes

No presente estudo, os participantes são os alunos de uma turma do 10.º ano de escolaridade da Escola Secundária Rainha Dona Leonor. A turma é constituída por vinte e sete alunos, mas um dos alunos não participou do estudo, pois não possuía autorização do seu respetivo encarregado de educação. O motivo de considerar todos os alunos disponíveis como participantes deve-se a uma recolha de dados mais diversificada, que me permita obter uma visão abrangente da turma, para responder às questões de investigação.

Os alunos envolvidos no estudo não foram mencionados pelo nome no relatório, uma vez que foram utilizados nomes fictícios a fim de preservar sua privacidade.

4.3. Métodos de recolha de dados

Durante o desenvolvimento deste estudo, irei posicionar-me como observador participante, que é uma das "estratégias mais representativas da investigação qualitativa" (Bogdan & Biklen, 1994, p.16).

Para a recolha de dados utilizei a observação direta, com registo em áudio, a recolha documental e a realização de entrevistas.

4.3.1. Observação Direta

A observação direta dos participantes foi realizada ao longo da minha intervenção letiva, com especial atenção aos momentos de discussão coletiva. Durante as aulas fiz anotações de detalhes que considerei importantes para o estudo e para as aprendizagens dos alunos, e complementei estas anotações com os registos de áudio realizados em sala de aula. Este complemento permitiu realizar uma análise precisa das diferentes interações entre os alunos e comparar as suas justificações orais com as escritas. Portanto, fiquei com uma perceção mais clara das origens das dificuldades dos alunos, e quais características da abordagem exploratória foram mais relevantes.

4.3.2. Recolha Documental

Os documentos recolhidos corresponderam às resoluções escritas dos alunos em todas as fichas de trabalho e na questão-aula. Quanto ao processo de recolha das produções escritas nas fichas, para estudar as dificuldades e caracterizar as justificações escritas dos alunos, da forma mais autêntica possível, foi-lhes pedido que resolvessem as questões numa folha à parte e no momento de discussão coletiva, que registassem as possíveis correções no seu caderno diário, de modo a evitar alterações na sua resolução durante a discussão em turma. Quanto à questão-aula, como esta foi recolhida para avaliação, eu a digitalizei, e só depois as entreguei com a respetiva classificação, não tendo havido assim qualquer adulteração.

4.3.3. Entrevista

No final das intervenções letivas associadas a este estudo, e com base nos dados que obtive dos restantes instrumentos, fiz entrevistas a quase todos os alunos da turma, tendo apenas excluído dois grupos. Um dos grupos preferi não entrevistar, pois um dos seus elementos tratava-se do aluno que não tinha autorização para participar no estudo. Nesse caso, considerei que não seria justo e não obteria uma visão consensual entre os dois membros, se apenas entrevistasse um deles. O outro grupo não foi entrevistado devido às entrevistas terem sido realizadas em tempo de aula, em conciliação com o seu mau comportamento, portanto, para evitar constrangimentos e interrupções do bom funcionamento das aulas, decidi não entrevistar este grupo.

Considero importante mencionar, que inicialmente era para ter entrevistado no máximo quatro grupos, com características distintas quanto ao seu empenho, participação e resultados. Porém, eu permiti que os grupos formados fossem escolhidos pelos alunos, para evitar desconfortos e trocas futuras, o que gerou grupos bastante similares quanto às características anteriormente mencionadas. Assim, decidi entrevistar todos os grupos, para conhecer e sintetizar quais foram os elementos ocorridos em aula que os alunos atribuíram uma maior importância para suas justificações, que é um tópico essencial para responder à minha terceira questão.

As entrevistas foram realizadas com suporte de áudio e são semi-estruturadas. Este grau de estruturação tem a vantagem de obter dados comparativos entre os vários alunos selecionados, permitindo uma melhor sistematização da informação (Bogdan e Biklen, 1994).

4.4. A análise de dados

Atendendo às questões de investigação, evitei selecionar exercícios simples, ou seja, que tratassem de aplicações óbvias de determinadas propriedades ou procedimentos. Assim, escolhi para análise questões que promovessem uma variedade de representações e estratégias de resolução, justificações de natureza diversa e reflexões mais profundas acerca da validade das justificações. Na tabela 5 encontram-se as questões alvo de análise, enquadradas na ficha de trabalho e questão-aula respetiva.

Tabela 5: Questões a Analisar.

Ficha de Trabalho A	Questão 1
Ficha de trabalho B	Questão 1.2
Ficha de trabalho C	Questão 1.a), 1.b), 2.d), 2.e) e 2.f)
Ficha de trabalho D – Parte I e Parte II	Todas as questões de ambas as partes
Ficha de trabalho E	Questão 1.1 e 1.2.b)
Ficha de trabalho F – Parte I	Questão 1
Ficha de trabalho F – Parte II	Questão 1.1
Questão-Aula	Questão 1.2.3 e 1.3.2

A análise das justificações presentes nas resoluções foi realizada com base no quadro de Mata-Pereira (2018), presente no capítulo 2, de maneira a caracterizá-las quanto ao nível de complexidade e tipo de formalidade.

As fichas de trabalho e respetivas questões estão dispostas por ordem cronológica de apresentação à turma. Em todas as questões, com exceção das presentes na ficha de trabalho D – Parte I e na ficha de trabalho F – Parte I, é apresentado inicialmente duas tabelas com um resumo geral dos tipos de formalidade e níveis de complexidade das justificações dos participantes do estudo e, em seguida, analiso mais detalhadamente algumas resoluções que exemplifiquem as situações ocorridas. Assim, para essas questões, foram criadas duas tabelas. Uma delas exibe a frequência absoluta e relativa dos níveis de complexidade e a outra dos tipos de formalidade, com a mesma indicação das duas frequências. Quando um aluno não conseguiu resolver uma determinada questão, essa situação foi registada em uma nova coluna denominada "Não Resolveu". Nas justificações que se enquadram no nível 0 de complexidade, não foi atribuído um tipo de formalidade, uma vez que, se o aluno não justifica sua resposta, não é possível classificar sua formalidade. Portanto, na tabela relacionada ao tipo de formalidade, foi adicionada a coluna "Não Atribuível" para registar essas ocorrências.

Quanto às outras questões presentes nas fichas anteriormente mencionadas, visto que envolvem a apreciação por parte dos alunos de justificações apresentados por outros, a análise consistirá na minha interpretação sobre como decorreu essa reflexão, nomeadamente, a participação dos alunos, a validade dos seus argumentos e a condução de possíveis melhorias na sua própria resolução.

Em todas as fichas, irei sintetizar as dificuldades dos alunos tanto na formulação de justificações, como nos conceitos empregues, e comentar os elementos ocorridos em aula que terão sido mais relevantes para a superação dessas dificuldades. Adicionalmente, nas fichas em que tenham ocorrido momentos de discussão coletiva, irei destacar alguns excertos e classificarei as minhas ações com base no modelo da condução de discussões matemáticas de Ponte (2013).

4.5. Questões de Natureza Ética

Todas as orientações referidas na Carta Ética para a Investigação em Educação e Formação (CEIEF) do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa foram respeitados.

Antes de iniciar o presente estudo, os participantes foram informados sobre o propósito, os dados a recolher, e como consistia a sua participação. É importante destacar que a escola já possui um documento escrito onde constavam os consentimentos dos encarregados de educação quanto aos registos de áudio. Neste documento, tomei conhecimento que apenas um dos alunos não tem este tipo de autorização por parte do seu encarregado de educação, e por isso não foram realizados quaisquer registos de áudio deste aluno.

No que concerne à confidencialidade e privacidade, assegurei-me de que toda a informação recolhida para este estudo foi armazenada de forma segura e que foram utilizados nomes fictícios para os alunos, de forma a garantir o anonimato dos participantes (Tuckman, 2005).

5. ANÁLISE DE DADOS

Neste capítulo, apresento a análise dos dados recolhidos durante a intervenção, com o objetivo de responder às questões de investigação estabelecidas na introdução deste relatório. São analisadas as resoluções das fichas de trabalho e da questão-aula produzidas pelos alunos, bem como as interações de aula registas em áudio, com interesse nas justificações matemáticas presentes e na participação. Também serão analisadas as respostas dos alunos às entrevistas, apresentado a visão da turma para cada pergunta. Esta análise também incluiu as anotações no bloco de notas pessoal.

5.1. Ficha de trabalho A

Para a análise da ficha de trabalho A, selecionei a questão 1.

5.1.1. Questão 1

1. No exercício 9 da página 36 do manual *Máximo 10* com os vetores $\vec{u}(1,-2,2)$ e $\vec{v}(-1,2,4)$ obteve-se o seguinte caso:

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| \neq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

Dados dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, em que condições se verifica a igualdade $\|\vec{a}+\vec{b}\| = \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$? Justifica.

Figura 7: Questão 1 da Ficha de trabalho A

Pode observar-se na Tabela 6, que a maioria dos alunos que respondeu à questão fundamentaram a sua resposta com base na evidência empírica (nível 2), sendo o caso mais comum alegarem a sua generalização como válida porque a testaram em alguns exemplos. Em relação às restantes justificações, estas se situaram nos dois polos: seis alunos não ofereceram qualquer justificação, enquanto os outros quatro conseguiram justificar suas respostas dedutivamente, com base em procedimentos ou propriedades.

Tabela 6: Níveis de complexidade das justificações na Questão 1 da Ficha de trabalho A

Questão 1 (Ficha de trabalho A)	**Níveis de complexidade**						Não resolveu
	0	**1**	**2**	**3A**	**3B**	**3C**	
Nº de alunos	6		13			4	3
Percentagem	26,1%		56,5%			17,4%	-

No que se refere à formalidade, dos alunos que apresentaram uma justificação, apenas dois alunos formularam uma justificação formal e completa, e os restantes incompleta.

Tabela 7: Tipos de formalidade das justificações na Questão 1 da Ficha de trabalho A

Questão 1 (Ficha de trabalho A)	Tipos de formalidade			Não atribuível	Não resolveu
	A	**B**	**C**		
Nº de alunos		15	2	6	3
Percentagem		88,2%	11,8%	-	-

Em seguida, exemplificarei com as resoluções escritas dos alunos os níveis de complexidade e tipos de formalidade registados. Em primeiro lugar, apresento a resolução da Catarina (Figura 8), classificada como nível 3C em termos de complexidade e tipo C em termos de formalidade.

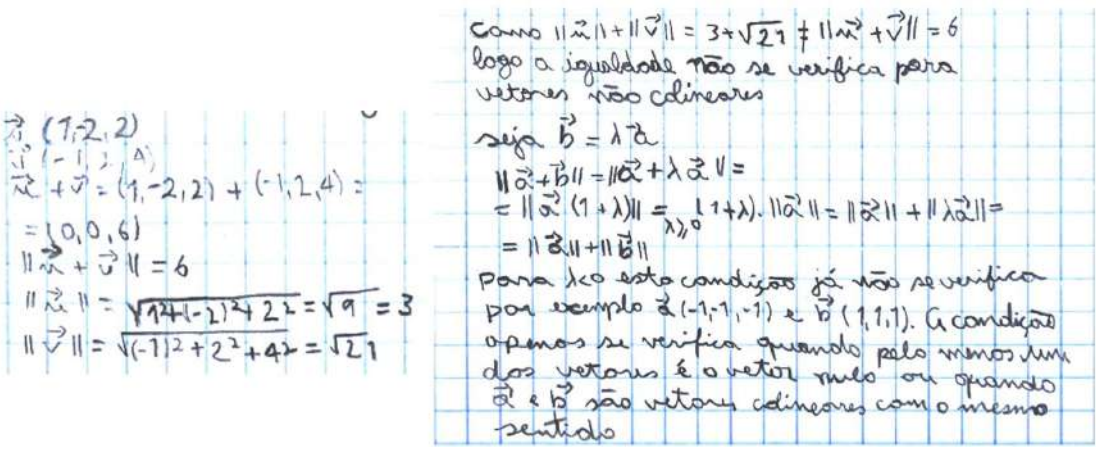
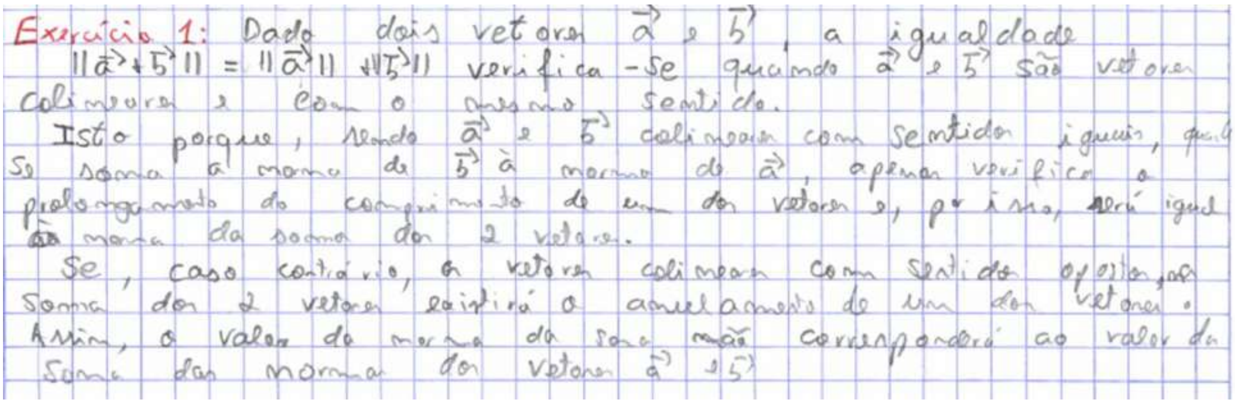


Figura 8: Resolução da Catarina na Questão 1 da Ficha de trabalho A

A aluna recorreu à linguagem natural e algébrica, conseguindo utilizar as propriedades e procedimentos associados à colinearidade de vetores e à simplificação de expressões algébricas para chegar ao resultado pretendido, pelo qual atribuí o nível de complexidade 3C. No que diz respeito à formalidade, é possível observar a utilização de um conjunto de inferências bem estruturadas, com a explicitação completa de todos os conceitos envolvidos (tipo de formalidade C).

Por comparação, na figura 9, apresento a resolução do Rui, à qual atribuí o mesmo nível de complexidade que a da Catarina, mas que considerei do tipo B quanto à formalidade, uma vez que a sua justificação, apesar de formal, está incompleta.



Exercício 1: Dado dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, a igualdade $\|\vec{a}+\vec{b}\| = \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$ verifica-se quando $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são vetores colineares e com o mesmo sentido.
Isto porque, sendo $\vec{a}$ e $\vec{b}$ colineares com sentidos iguais, quando se soma a norma de $\vec{b}$ à norma de $\vec{a}$, apenas verifica o prolongamento do comprimento de um dos vetores e, por isso, será igual à norma da soma dos 2 vetores.
Se, caso contrário, os vetores colineares com sentido opostos, na soma dos 2 vetores existirá o anulamento de um dos vetores. Assim, o valor da norma da soma não corresponderá ao valor da soma das normas dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

Figura 9: Resolução do Rui na Questão 1 da Ficha de trabalho A

O Rui, à semelhança da Catarina, utilizou uma justificação de natureza dedutiva, com base nas mesmas propriedades. No entanto, está incompleta, já que na sua resposta, o aluno afirma corretamente que a condição se verifica quando os vetores são colineares e com o mesmo sentido, mas cita que apenas acontece devido a ocorrer um "prolongamento de um dos vetores", enquanto que a Catarina recorre e explicita a propriedade $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ para justificar a sua generalização. Portanto, é percetível a intenção do aluno, no entanto, não descreve qual a propriedade utilizada, por isso atribuí o tipo de formalidade B. Além disso, o aluno não testou o caso de pelo menos um dos vetores ser o vetor nulo, e nem analisou a hipótese de os dois vetores serem não colineares. Nota-se ainda, que quando o aluno refere: "na soma de 2 vetores (colineares com sentidos opostos) existirá o anulamento de um dos vetores", não é mencionado que também pode ocorrer que a soma dos dois vetores pode ser o vetor nulo. Esta informação seria importante de acrescentar, visto que os vetores simétricos são um caso particular de vetores colineares com sentidos opostos, cuja soma é o vetor nulo.

Nas justificações de nível de complexidade 2, apresento a resolução da Margarida (Figura 10), uma vez que apesar de a aluna ter conseguido identificar quatro casos possíveis, a sua justificação baseia-se em casos particulares, e considerei do tipo B quanto à formalidade, pois está incompleta por não identificar o que representam os quatro desenhos, e tal como o Rui, não considerar a soma de vetores simétricos.

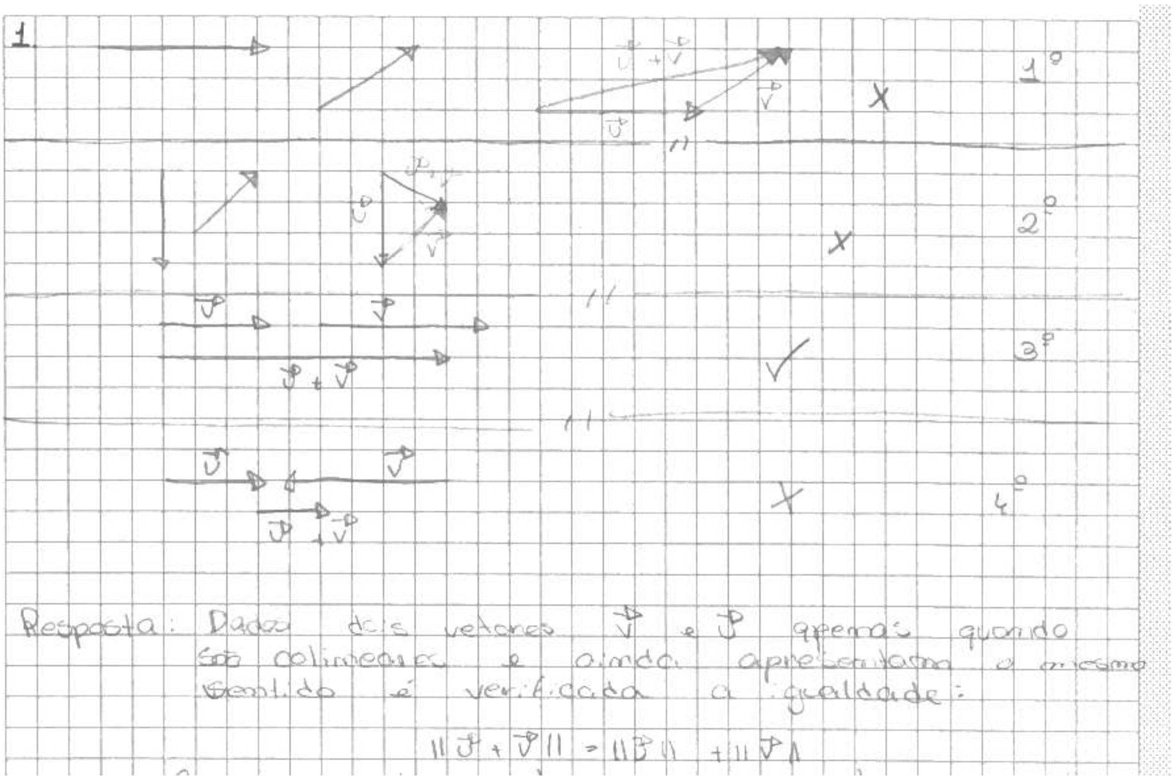


Figura 10: Resolução da Margarida na Questão 1 da Ficha de trabalho A

A Margarida apresentou a resolução desta questão na discussão coletiva. Abaixo se encontra transcrito o diálogo ocorrido:

Professor: Eu achei esta resolução interessante, visto que foram dos poucos grupos que recorreram a representações visuais, mas há aqui alguns pormenores que queria que explicasses a mim e à turma. O que representam aqui os quatro casos?

Margarida: No primeiro e no segundo testamos com vetores não colineares, só que no primeiro são vetores não perpendiculares e no segundo já são. O terceiro é vetores colineares com o mesmo sentido, e o quarto é vetores colineares com sentidos opostos.

Professor: Então, no primeiro e no segundo caso, com base naquilo que abordamos sobre a soma de vetores, qual a diferença entre eles?

Margarida: Ãh… na regra… acho que não há diferença…

Professor: Então qual é a hipótese que estás a testar?

Margarida: Vetores não colineares…

Professor: Exato, então porque não identificaste os vetores?

Margarida: Pois, devia ter escrito que era para vetores não colineares.

Professor: E para os restantes?

Margarida: Sim sim, eu devia ter escrito que tipos de vetores eram.

Professor: E sobre as justificações, para mostrares que a hipótese dos vetores não colineares não resulta, era preciso os dois exemplos?

Margarida: Não, bastava um para provar que é mentira.

Professor: Certo, mas no terceiro, tu provaste que era verdade como?

Margarida: Aquilo são dois vetores colineares, como se vê pelo desenho, eles se juntam, a distância de um com de outro.

Professor: E se eu escolher outros dois vetores colineares, como podia provar que isso continuava a acontecer?

Margarida: Pois… pensei que… talvez tivesse que ser doutra maneira…

Ao compararmos a discussão oral com a resolução escrita da Margarida, identificamos que a aluna expressou de forma espontânea o que os desenhos representavam, algo que decidiu não incluir na resolução, e que a levou testar hipóteses desnecessárias. Esta situação mostra como uma simples falta de menção dos casos que estão a ser tratados, não só torna a justificação incompleta, como pode conduzir a maiores dificuldades durante a resolução. Outro aspecto relevante é a clara perceção da aluna de que basta utilizar um único exemplo para refutar uma determinada conjetura, mas depois aplica o mesmo procedimento, de forma imediata, quando quer também generalizar.

Apresento, por fim, a resolução do Fábio (Figura 11), a que atribuí o nível de complexidade 0.

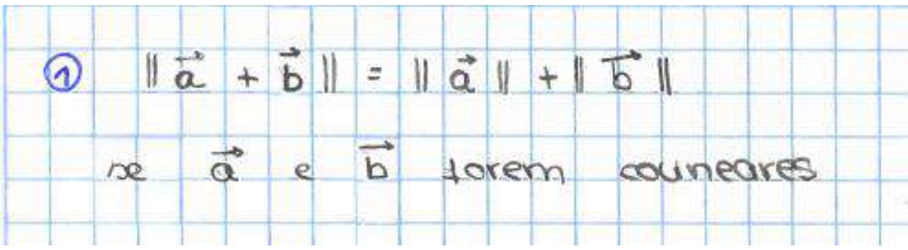


Figura 11: Resolução do Fábio na Questão 1 da Ficha de trabalho A

Como podemos constatar, o aluno apresenta uma resposta, não justificando como chegou a esse resultado (nível de complexidade 0). Nota-se ainda que a resposta se encontra incompleta, devido ao facto de não ser suficiente os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ serem colineares, têm de ser colineares com o mesmo sentido.

5.1.2. Ações do Professor e Dificuldades dos alunos

Durante a introdução desta ficha de trabalho senti os alunos pouco atentos, o que me motivou a fazer diversas questões de confirmação no início do momento da realização da ficha, para compreender se as dúvidas dos alunos advinham da interpretação incorreta do enunciado ou da falta de conhecimento sobre os conceitos presentes. Apesar dessa situação, quando a maior parte dos alunos já tinha iniciado a sua resolução, as questões de inquirição tornaram-se mais predominantes, incentivando os alunos a esclarecer por escrito o que tinham referido oralmente. Na discussão coletiva, como se pode verificar pelo exemplo do excerto do diálogo com a Margarida, iniciei a discussão **convidando-a** a clarificar a sua resolução, **guiando-a** depois a refletir sobre se as hipóteses testadas iriam de encontro com as propriedades da colinearidade de vetores, e em seguida, a **desafiei** a explicar como deveria justificar que a condição não era respeitada para vetores não colineares, e como conseguia provar que a condição era respeitada para quaisquer pares de vetores colineares com o mesmo sentido. A ação de desafiar foi a que considerei mais relevante ao longo da discussão coletiva, porque senti que os alunos só começaram a refletir sobre a invalidade ou incompletude da sua justificação quando foram incentivados a dar-lhe sentido. Nesse âmbito, pude compreender que a quantidade de justificações com nível 2 de complexidade, não foram um resultado do pouco conhecimento dos alunos acerca dos conceitos tratados, mas sim da experimentação ingénua de considerar que um teste de casos particulares constituía uma justificação matematicamente válida para uma generalização. A predominância do tipo B de formalidade advém dos alunos utilizarem propriedades e procedimentos, mas sem a explicitação clara de como foram utilizados, que é nítido no caso da Margarida.

Quanto à quantidade de justificações de nível 0 de complexidade, o motivo prende-se às dificuldades da conversão da linguagem natural para a algébrica de modo a generalizar as regras, não por desconhecimento das propriedades da colinearidade de vetores, mas sim porque ainda não estão habituados a manipular expressões que contenham a norma de um vetor. A resolução da Margarida foi a última a ser apresentada na discussão coletiva por esse motivo, para dar tempo aos alunos de tirarem dúvidas sobre as manipulações efetuadas e refletirem sobre como o papel da linguagem algébrica é importante tanto para a generalização, como para a justificação.

5.2. Ficha de trabalho B

O objetivo principal desta ficha era verificar de que forma os alunos aplicariam o seu conhecimento prévio sobre a altura e volume de pirâmides em conjunto com os novos conceitos adquiridos sobre vetores no espaço. Com esse propósito, optei por analisar a questão 1.2.

5.2.1. Questão 1.2.

> 1.2 Indica, justificando, o valor lógico da seguinte afirmação: o tronco de pirâmide $[ABCDEFGH]$ tem uma capacidade inferior a $100cm^3$.

Figura 12: Questão 1.2. da Ficha de trabalho B

Em termos de nível de complexidade, as justificações dos alunos distribuem-se de forma semelhante à questão 1 da Ficha de trabalho A, com a diferença de que todos os alunos que realizaram a questão, tentaram justificar a conclusão obtida. Quanto à formalidade, todos os alunos que justificaram apresentaram uma justificação formal, mas incompleta.

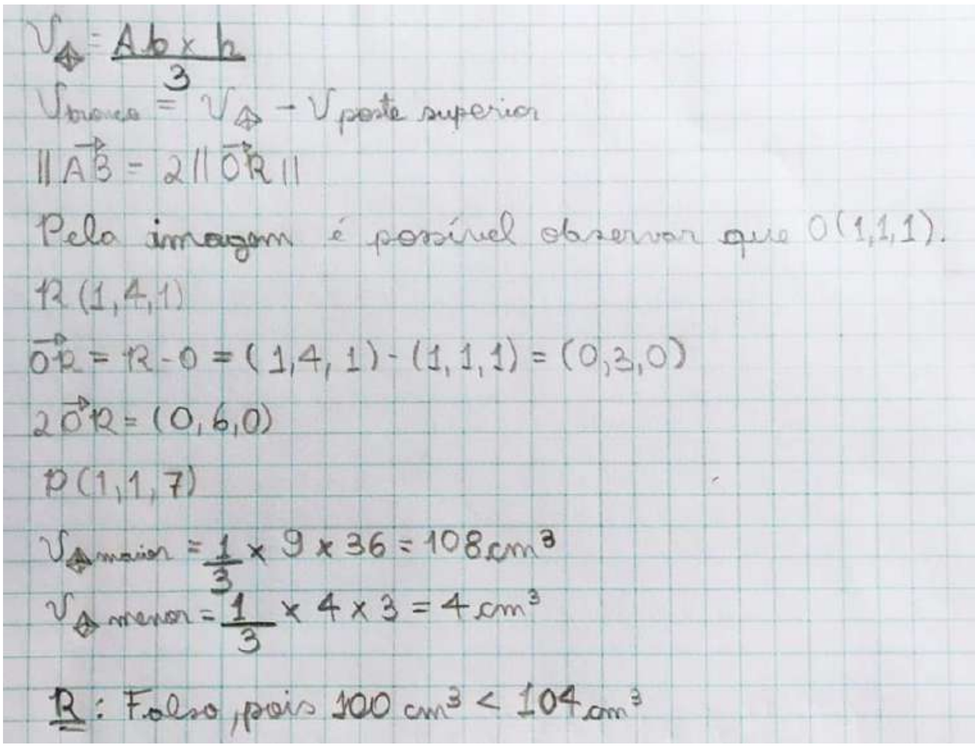
Tabela 8: Níveis de complexidade das justificações na Questão 1.2. da Ficha de trabalho B

Questão 1.2. (Ficha de trabalho B)	**Níveis de complexidade**						Não resolveu
	0	**1**	**2**	**3A**	**3B**	**3C**	
Nº de alunos			22			2	2
Percentagem			91,7%			8,3%	-

Tabela 9: Tipos de formalidade das justificações na Questão 1.2. da Ficha de trabalho B

Questão 1.2. (Ficha de trabalho B)	**Tipos de formalidade**			Não atribuível	Não resolveu
	A	**B**	**C**		
Nº de alunos		24			2
Percentagem		100%			-

Em primeiro lugar, apresento a resolução da Eduarda, que considero uma justificação de nível de complexidade 2 e tipo de formalidade B (Figura 13).



$V_{\blacktriangle} = \frac{Ab \times h}{3}$

$V_{tronco} = V_{\blacktriangle} - V_{parte\ superior}$

$\|\overrightarrow{AB}\| = 2\|\overrightarrow{OR}\|$

Pela imagem é possível observar que O(1,1,1).

R(1,4,1)

$\overrightarrow{OR} = R - O = (1,4,1) - (1,1,1) = (0,3,0)$

$2\overrightarrow{OR} = (0,6,0)$

P(1,1,7)

$V_{\blacktriangle maior} = \frac{1}{3} \times 9 \times 36 = 108 cm^3$

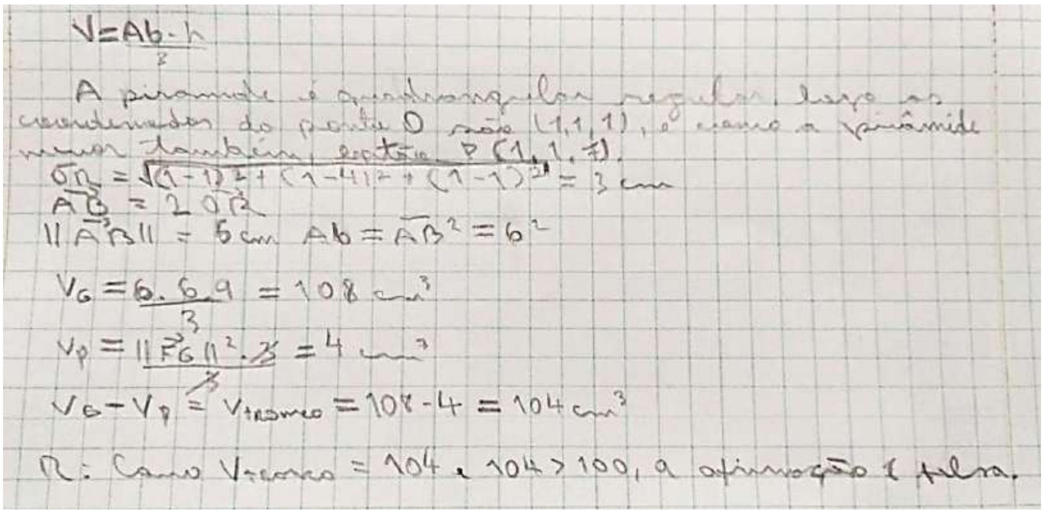
$V_{\blacktriangle menor} = \frac{1}{3} \times 4 \times 3 = 4 cm^3$

R: Falso, pois $100 cm^3 < 104 cm^3$

Figura 13: Resolução da Eduarda na Questão 1.2. da Ficha de trabalho B

Nesta resolução, é notório que a aluna recorreu à perceção visual da figura para obter as coordenadas do ponto O e do ponto P, o que comprova o nível 2 de complexidade. A respeito da formalidade, considero que apesar de formal, a aluna deveria ter mencionado o que entendia por $V_{\blacktriangle maior}$ e por $V_{\blacktriangle menor}$, até porque inicialmente a aluna utilizou a expressão "parte superior" para se referir ao $V_{\blacktriangle menor}$, e também deveria ter indicado como obteve o valor "$104\ cm^3$". Por esses motivos, atribuí-lhe o tipo de formalidade B.

Para exemplificar uma resolução de nível de complexidade 3C e tipo de formalidade B, apresento na figura 14 a resolução do Tomé.



$V = \frac{Ab \cdot h}{3}$

A pirâmide é quadrangular regular, logo as coordenadas do ponto O são (1,1,1), e como a pirâmide menor também, então P(1,1,7).

$\overline{OR} = \sqrt{(1-1)^2 + (1-4)^2 + (1-1)^2} = 3$ cm

$\overline{AB} = 2\overline{OR}$

$\|\overrightarrow{AB}\| = 6$ cm $Ab = \overline{AB}^2 = 6^2$

$V_G = \frac{6 \cdot 6 \cdot 9}{3} = 108 cm^3$

$V_P = \frac{\|\overrightarrow{FG}\|^2 \cdot \cancel{3}}{\cancel{3}} = 4 cm^3$

$V_G - V_P = V_{tronco} = 108 - 4 = 104 cm^3$

R: Como $V_{tronco} = 104$ e $104 > 100$, a afirmação é falsa.

Figura 14: Resolução do Tomé na Questão 1.2 da Ficha de trabalho B

É possível observar que ao contrário da resolução anterior, este aluno recorre a propriedades e procedimentos matemáticos para justificar todos os valores obtidos, pelo que atribuí o nível 3C de complexidade. Na formalidade, apesar de ter indicado que as pirâmides $[ABCDV]$ e $[EFGHV]$ são regulares para justificar as coordenadas dos pontos O e P, a justificação só seria formal e completa se tivesse explicitado que por ser uma pirâmide regular, a altura da pirâmide corresponderia à distância do vértice V ao centro da base $[ABCD]$. Adicionalmente, também deveria ter assinalado que a pirâmide $[EFGHV]$ é regular, por esta ter sido obtida através da interseção de um plano paralelo à base $[ABCD]$. Assim, por ter deixado esses elementos implícitos, atribuí o tipo de formalidade B.

5.2.2 Ações do Professor e Dificuldades dos alunos

Na presente questão, os alunos revelaram compreender o comportamento dos vetores ao longo das arestas da pirâmide, mas manifestaram dificuldades em utilizar conhecimento prévio durante as suas justificações. Segundo o que pude constatar, na perceção dos alunos, quando existe algo que considerem óbvio, ou facilmente visível, por estar relacionado a conceitos de anos de escolaridade anteriores, ficam na dúvida se devem explicitar esse conhecimento, porque não querem que a sua resolução fique demasiado extensa. Outra dificuldade, associada à anterior, é a nítida falta de prática na forma como devem estabelecer conexões entre diferentes temas, pois como negligenciam constantemente o que consideram óbvio, quando são solicitados a justificar usando esse conhecimento, ficam na dúvida de quais os termos mais adequados para fazê-lo. Estes dois motivos conduziram que a maioria das justificações fossem de nível 2 de complexidade, e tipo de formalidade B na sua totalidade.

A respeito das três fases da aula abrangidas por esta ficha, na introdução notei que os alunos estavam mais atentos enquanto esclarecia o enunciado das questões, comparativamente com a ficha anterior. Durante a realização da ficha, comecei por fazer questões de inquirição para incentivá-los a explicarem como obtiveram as coordenadas do ponto O e P, pois nenhum grupo, inicialmente, tinha explicitado como determinou esses elementos. Porém, a meio do tempo fornecido para a resolução, as questões passaram a ser mais de focalização, de modo a direcionar os alunos a perceber que a justificação passa pelo facto da pirâmide ser regular. No momento de discussão coletiva, como nenhum aluno explicitou todas as propriedades para uma justificação válida e completa, as minhas ações consistiram, principalmente, em **informar** e **guiar**, como pode ser verificado no seguinte excerto:

Professor: (..) Reparem, qual a diferença entre uma pirâmide oblíqua e reta?

Aluno 1: A oblíqua é mais deitada…

Professor: Mas o que isso significa em termos de altura, quando precisam de calcular a altura de uma pirâmide oblíqua e reta, quais são as diferenças?

Aluno 2: Na reta…dá para ver diretamente a altura

Professor: Sim, mas então numa pirâmide reta vocês conseguem obter a altura calculando a diferença desde o vértice da pirâmide até ao centro da base, e numa pirâmide oblíqua?

(…)

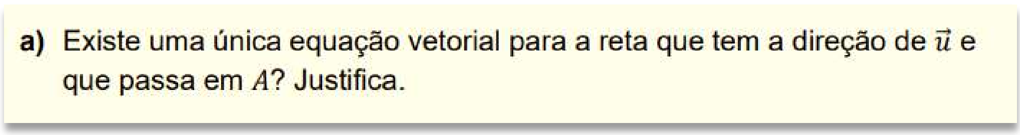
Professor: Percebido a diferença, já sabemos que qualquer pirâmide regular é reta. Agora, onde é que isso nos pode ajudar a apresentar uma justificação completa?

Assim, foi necessário sugerir e apoiar constantemente os alunos para perceberem o porquê de uma justificação com base na perceção visual da figura não poder ser válida para este caso, pois existe uma sequência lógica de inferências que conduzem à justificação das coordenadas dos pontos, e esta não foi apresentada.

5.3. Ficha de trabalho C

Para a análise da ficha de trabalho C, selecionei as duas primeiras alíneas da questão 1, e as três últimas alíneas da questão 2.

5.3.1. Questão 1. – alínea a)



a) Existe uma única equação vetorial para a reta que tem a direção de $\vec{u}$ e que passa em A? Justifica.

Figura 15: Questão 1a) da Ficha de trabalho C

Nesta questão, quase todos os alunos justificaram a sua resposta com recurso a contraexemplos, pelo que atribui o nível de complexidade 3A. Os restantes justificaram dedutivamente, recorrendo à definição e propriedades da equação vetorial.

Tabela 10: Níveis de complexidade das justificações na Questão 1a) da Ficha de trabalho C

Questão 1a) (Ficha de trabalho C)	**Níveis de complexidade**						Não resolveu
	0	**1**	**2**	**3A**	**3B**	**3C**	
Nº de alunos				20		6	
Percentagem				76,9%		23,1%	

Quanto à formalidade, a diferença entre a quantidade de alunos que apresentou uma justificação formal incompleta e completa foi menor relativamente às questões das fichas anteriores.

Tabela 11: Tipos de formalidade das justificações na Questão 1a) da Ficha de trabalho C

Questão 1a) (Ficha de trabalho C)	**Tipos de formalidade**			Não atribuível	Não resolveu
	A	**B**	**C**		
Nº de alunos		16	10		
Percentagem		61,5%	38,5%		

Inicio a exemplificação com a resolução do António, que atribuí o nível de complexidade 3C e tipo de formalidade C (Figura 16).

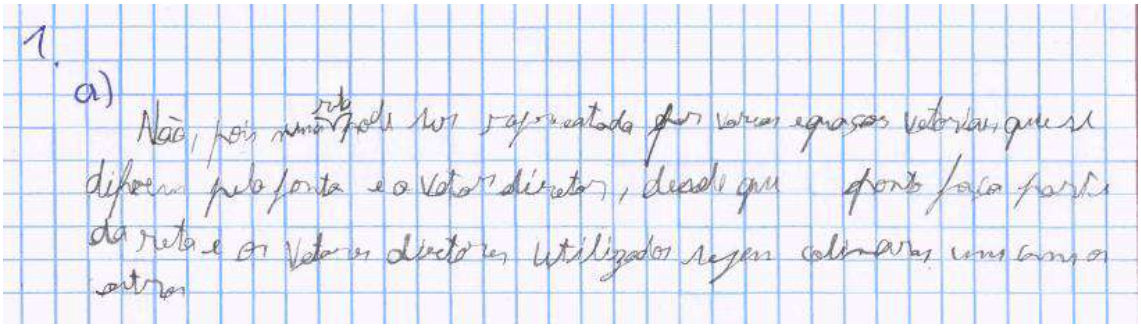
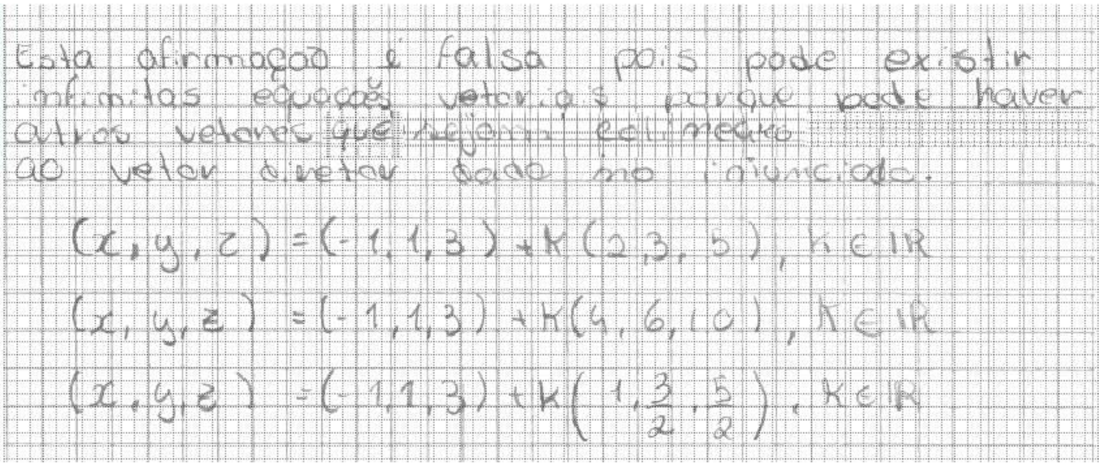


Figura 16: Resolução do António na Questão 1a) da Ficha de trabalho C

O António refere explicitamente que uma reta pode ser representada por equações vetoriais que se diferem no ponto e no vetor, desde que o ponto “faça parte da reta” e os “vetores diretores utilizados sejam colineares” entre si. Portanto, o aluno justifica de forma dedutiva, formal e completa, por isso a atribuição do nível de complexidade 3C e o tipo de formalidade C.

Comparando com a resolução da Margarida (Figura 17), que também formulou uma justificação com o mesmo tipo de formalidade que o António, mas com o nível de complexidade 3A, pode-se observar que a aluna está ciente do facto de que há infinitas maneiras de escrever uma equação vetorial para representar uma reta, mas a forma como decide justificar essa afirmação é apresentando três equações vetoriais que representam a mesma reta, e que só diferem no vetor diretor escolhido. Assim, a Margarida está a recorrer a contraexemplos (complexidade 3A) e apresenta, à semelhança do António, uma justificação formal e completa, uma vez que a aluna além de escrever os contraexemplos, também esclarece do que se tratam.



Esta afirmação é falsa pois pode existir infinitas equações vetoriais porque pode haver outros vetores que sejam colineares ao vetor diretor dado no enunciado.

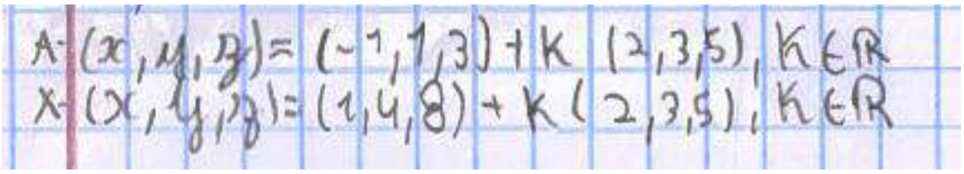
$(x,y,z)=(-1,1,3)+k(2,3,5),\ k\in\mathbb{R}$

$(x,y,z)=(-1,1,3)+k(4,6,10),\ k\in\mathbb{R}$

$(x,y,z)=(-1,1,3)+k\left(1,\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right),\ k\in\mathbb{R}$

Figura 17: Resolução da Margarida na Questão 1a) da Ficha de trabalho C

Com o mesmo nível de complexidade da justificação da Margarida, mas com um tipo de formalidade inferior, exponho a resolução do Paulo (Figura 18).



A: $(x,y,z)=(-1,1,3)+k(2,3,5),\ k\in\mathbb{R}$

X: $(x,y,z)=(1,4,8)+k(2,3,5),\ k\in\mathbb{R}$

Figura 18: Resolução do Paulo na Questão 1a) da Ficha de trabalho C

Como se pode observar, fica subentendido que a ideia do Paulo foi apresentar um contraexemplo, mas não indicou qual a sua resposta final, e não atribuiu qualquer significado às suas equações vetoriais, por isso considero uma justificação incompleta, tipo B de formalidade. No entanto, durante a discussão coletiva, este aluno conseguiu rapidamente explicar o seu raciocínio:

Professor: Consegues explicar-me o que significa aquele “X”?

Paulo: É o ponto X… o que eu fiz foi escrever duas equações vetoriais, uma com o ponto A e outra com o ponto X.

Professor: E escreveste duas equações vetoriais com pontos diferentes por quê?

Paulo: A pergunta fala sobre só haver uma, e eu consegui escrever duas equações para aquela reta.

Professor: E achas que está percetível que foi essa a tua ideia?

Paulo: Ãh… eu na próxima explico melhor.

Esta situação evidencia como são importantes estes momentos de discussão coletiva, pois não só constituem uma oportunidade para o aluno esclarecer o seu raciocínio, como também permitem ao professor compreender com maior facilidade quais foram as dificuldades do aluno. Neste caso, senti que inicialmente este aluno teria alguma dificuldade em exprimir-se, mas depois da discussão, senti que era apenas necessário incentivar mais este aluno a dar sentido às suas justificações.

5.3.2. Questão 1. - alínea b)

b) Escreve uma condição que defina o segmento de reta $[AB]$ e averigua se o ponto P de coordenadas $(-5, 3, -3)$ pertence a $[AB]$.

Figura 19: Questão 1b) da Ficha de trabalho C

Todos os alunos que resolveram esta questão apresentaram uma justificação dedutiva, baseada em propriedades e procedimentos, por isso foi-lhes atribuído o nível de complexidade 3C. Em relação à formalidade, a categoria mais predominante já foi o tipo C.

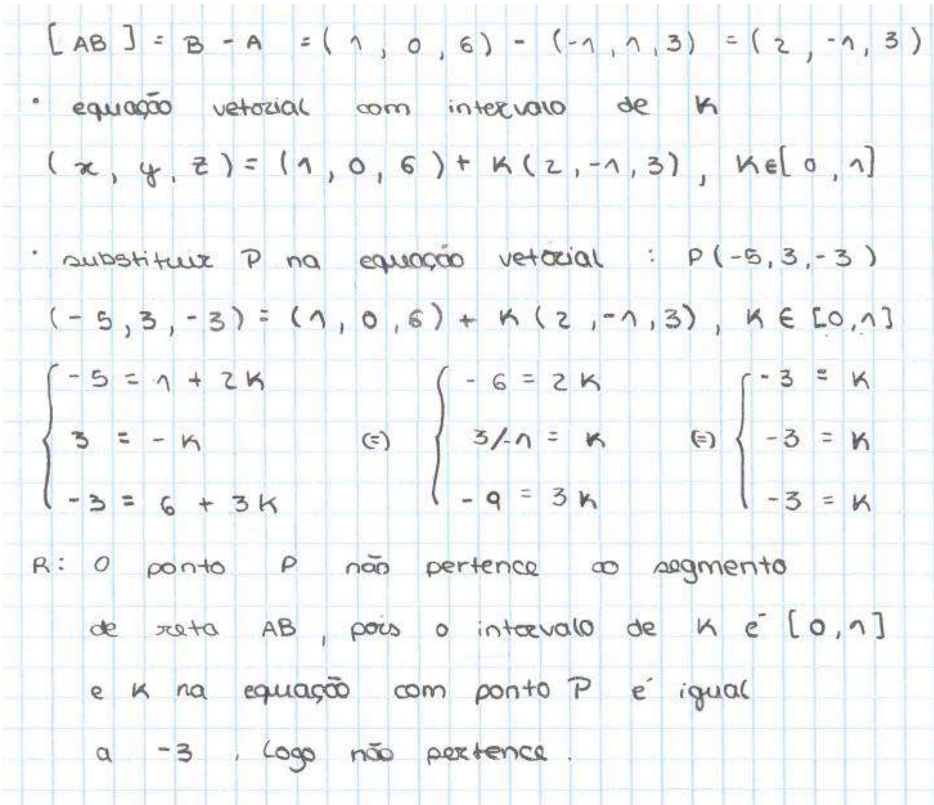
Tabela 12: Níveis de complexidade das justificações na Questão 1b) da Ficha de trabalho C

Questão 1b) (Ficha de trabalho C)	**Níveis de complexidade**						Não resolveu
	0	**1**	**2**	**3A**	**3B**	**3C**	
Nº de alunos						26	
Percentagem						100%	

Tabela 13: Tipos de formalidade das justificações na Questão 1b) da Ficha de trabalho C

Questão 1b) (Ficha de trabalho C)	**Tipos de formalidade**			Não atribuível	Não resolveu
	A	**B**	**C**		
Nº de alunos		6	20		
Percentagem		23,1%	76,9%		

Com o nível de complexidade 3C e tipo de formalidade C, início com a resolução da Clara (Figura 20).



$[AB] = B - A = (1, 0, 6) - (-1, 1, 3) = (2, -1, 3)$

• equação vetorial com intervalo de K

$(x, y, z) = (1, 0, 6) + K(2, -1, 3), \ K \in [0, 1]$

• substituir P na equação vetorial : $P(-5, 3, -3)$

$(-5, 3, -3) = (1, 0, 6) + K(2, -1, 3), \ K \in [0, 1]$

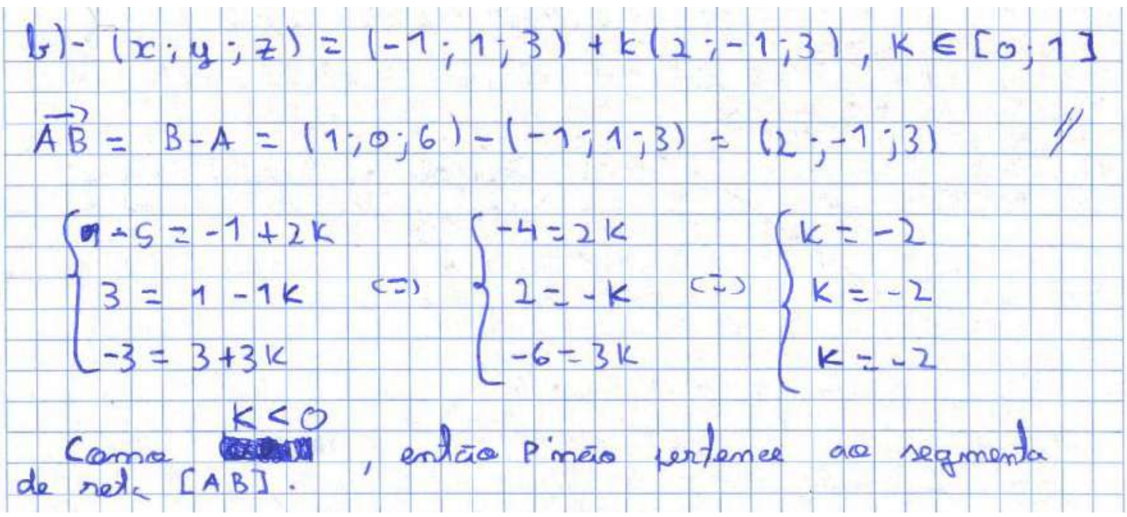
$$\begin{cases} -5 = 1 + 2K \\ 3 = -K \\ -3 = 6 + 3K \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 = 2K \\ 3/-1 = K \\ -9 = 3K \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = K \\ -3 = K \\ -3 = K \end{cases}$$

R: O ponto P não pertence ao segmento de reta AB, pois o intervalo de K é $[0, 1]$ e K na equação com ponto P é igual a -3, logo não pertence.

Figura 20: Resolução da Clara na Questão 1b) da Ficha de trabalho C

É notório que, apesar de no início da resolução ser possível identificar um erro de notação e na definição do intervalo do parâmetro k, a aluna evidencia todo o seu processo de raciocínio de modo formal e completo, recorrendo a propriedades e procedimentos da equação vetorial e do sistema de equações paramétricas da reta. Desta forma, considero fundamentado o nível de complexidade e o tipo de formalidade atribuído.

Ao compararmos a resolução do Fábio (Figura 21), que seguiu um padrão semelhante de formalidade, podemos notar que este aluno emprega a mesma estratégia.



b) - $(x; y; z) = (-1; 1; 3) + k(2; -1; 3), \ K \in [0; 1]$

$\overrightarrow{AB} = B - A = (1; 0; 6) - (-1; 1; 3) = (2; -1; 3)$ //

$$\begin{cases} -5 = -1 + 2k \\ 3 = 1 - 1k \\ -3 = 3 + 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 = 2k \\ 2 = -k \\ -6 = 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -2 \\ k = -2 \\ k = -2 \end{cases}$$

Como $k < 0$, então P não pertence ao segmento de reta [AB].

Figura 21: Resolução do Fábio na Questão 1b) da Ficha de trabalho C

No entanto, o motivo apresentado do porque do ponto P não pertencer ao segmento de reta $[AB]$, se baseou na negatividade do valor de k, ao invés de se referir ao facto de que o valor de k não pertence ao intervalo definido na equação vetorial.

Estas duas resoluções foram comparadas durante a discussão coletiva:

Professor: Fábio, já vimos pela resolução da Clara que o seu intervalo teria que ser [-1,0], achas que no caso dela o ponto P já podia pertencer, já que o problema é o k ser negativo?

Fábio: Não (...) é que como costumo ver o intervalo [0,1] então achei que podia ser assim (…) mas como na resolução anterior vimos que o intervalo seria [-1,0] usando o ponto B, então percebi que o k menor que 0 já não fazia sentido.

Considerei importante registar esta parte da discussão, pois senti que ela foi esclarecedora para a turma. Mesmo com os erros identificados, ficou evidente o raciocínio adotado, o que facilitou significativamente a compreensão dos conceitos matemáticos abordados no exercício.

Com uma justificação de tipo de formalidade B, mas com uma estratégia alternativa, apresento a resolução do Gabriel (Figura 22).

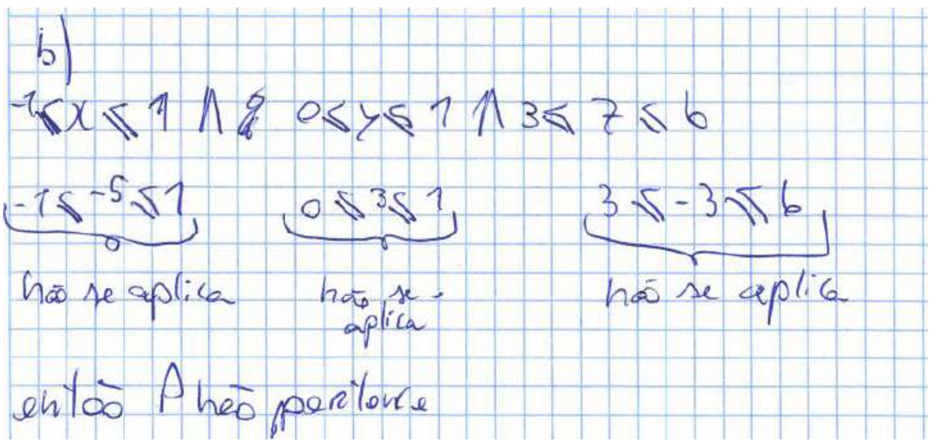


Figura 22: Resolução do Gabriel na Questão 1b) da Ficha de trabalho C

O Gabriel recorreu às equações paramétricas, mas carece de uma fundamentação mais completa, uma vez que o aluno não explicita quais as coordenadas do ponto P, o que não torna imediatamente evidente aquilo a que se refere com a expressão “não se aplica”.

5.3.3. Questão 2 – alínea d)

2. Indica, justificando, o valor lógico das seguintes afirmações:

d) Se os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ são colineares, então os pontos A, B e C pertencem à mesma reta.

Figura 23: Questão 2d) da Ficha de trabalho C

Esta alínea, como referido no capítulo 3, tinha como objetivo os alunos compreenderem a relação entre os vetores colineares e os pontos da reta que os representam, e os conduzir à lógica associada ao método de redução ao absurdo.

Tabela 14: Níveis de complexidade das justificações na Questão 2d) da Ficha de trabalho C

Questão 2d) (Ficha de trabalho C)	**Níveis de complexidade**						Não resolveu
	0	**1**	**2**	**3A**	**3B**	**3C**	
Nº de alunos			20	4		2	
Percentagem			76,9%	15,4%		7,7%	

Tabela 15: Tipos de formalidade das justificações na Questão 2d) da Ficha de trabalho C

Questão 2d) (Ficha de trabalho C)	**Tipos de formalidade**			Não atribuível	Não resolveu
	A	**B**	**C**		
Nº de alunos	2	22	2		
Percentagem	7,7%	84,6%	7,7%		

Como podemos observar pelas tabelas que apresentam o resumo geral dos níveis de complexidade e tipos de formalidade das justificações, grande parte dos alunos justificou com base na evidência empírica e de modo formal, mas incompleto.

Em seguida, exemplifico os diferentes níveis de complexidade e os tipos de formalidade constatados.

d) Afirmação verdadeira

Como têm um ponto em comum são colineares, ao serem colineares têm a mesma direção fazendo com que pertençam à mesma reta

Figura 24: Resolução da Clara na Questão 2d) – Ficha de trabalho C

Esta resolução foi a mais comum, onde os alunos para justificar a veracidade da afirmação, comentaram que os vetores tinham um ponto em comum, que em termos de rigor matemático é incorreto, pois, os pontos representam os vetores, não os definem. Nesse sentido, o mais correto seria dizer que a origem ou a extremidade de um dos vetores coincide com a origem ou extremidade do outro. Adicionalmente, a Clara esquece de mencionar a palavra "pontos", antes de "pertençam à mesma reta", o que torna a justificação incompleta, e por isso atribuí o tipo B de formalidade. O que mais condicionou a justificação desta aluna, e de todos os alunos que aplicaram o mesmo tipo de argumento, foi partir da perceção visual (nível de complexidade 2) de que se a extremidade de um vetor coincidir com a de outro, então os vetores são colineares, o que é falso, pois basta observar o seguinte contraexemplo:

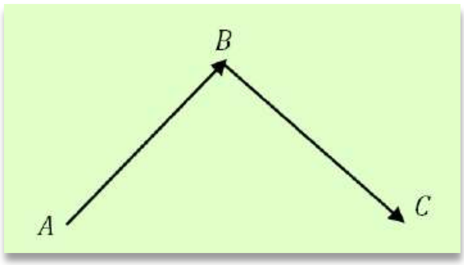


Figura 25: Representação de contraexemplo dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$

Em que a extremidade do vetor $\overrightarrow{AB}$ coincide com a origem do vetor $\overrightarrow{BC}$, e não são vetores colineares. Esta situação corrobora com a tendência documentada em trabalhos anteriores (Ponte, 2007; Ponte, Mata-Pereira & Henriques, 2012), de que os alunos não sentem a necessidade de testar as suas afirmações, o que conduziu esta aluna a uma justificação inválida.

Com o mesmo nível de complexidade, mas com um tipo de formalidade inferior, apresento a resolução do David (Figura 26):

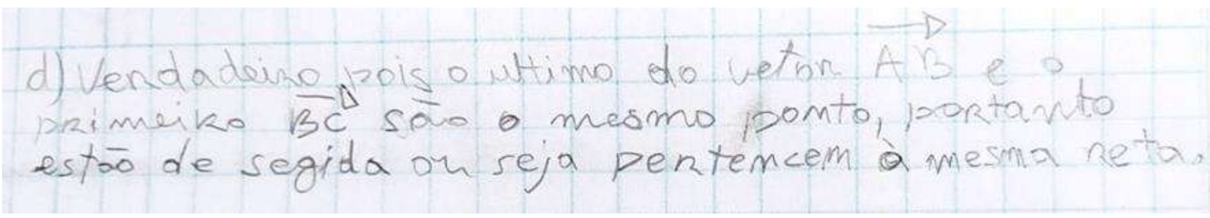
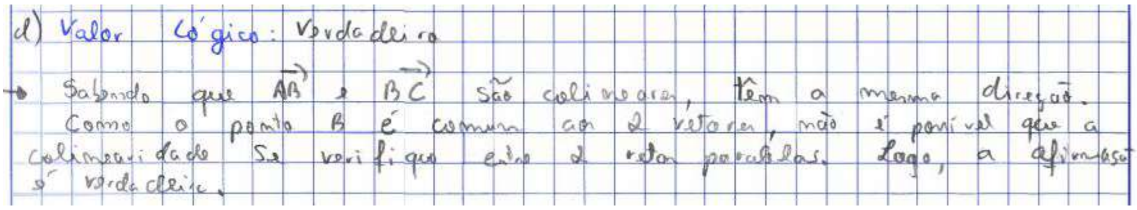


Figura 26: Resolução do David na Questão 2d) da Ficha de trabalho C

Como se pode observar, em termos de rigor matemático, o David utiliza diversas expressões que não se podem considerar uma utilização correta da linguagem matemática, como, por exemplo, referir-se à extremidade do vetor $\overrightarrow{AB}$ por o "último do vetor $\overrightarrow{AB}$", mencionar que os vetores “estão de seguida”, e sugerir que como os vetores “pertencem à mesma reta”, então os pontos em causa pertencem à mesma reta. Portanto, considero que é nítido que além da dificuldade de compreender que pontos não definem vetores, e que vetores não pertencem a retas, a justificação deste aluno trata-se de uma transcrição, por palavras suas, da perceção que obteve da situação. Este uso inapropriado de expressões que confundem o leitor, e a maneira percetual como justifica a veracidade da afirmação, leva a classificar a sua justificação com o nível de complexidade 2 e tipo de formalidade A.

Como exemplo do nível de complexidade 3C e tipo de formalidade C, encontra-se a resolução feita pelo Rui (Figura 27):


d) Valor lógico: verdadeiro

Sabendo que $\vec{AB}$ e $\vec{BC}$ são colineares, têm a mesma direção. Como o ponto B é comum aos 2 vetores, não é possível que a colinearidade se verifique entre 2 retas paralelas. Logo, a afirmação é verdadeira.

Figura 27: Resolução do Rui na Questão 2d) da Ficha de trabalho C

A respeito desta resolução, o Rui justifica a veracidade da afirmação, relacionando as propriedades da colinearidade de vetores com a classificação de retas de acordo com os pontos que têm em comum, e por isso atribuí o nível de complexidade 3C. Quanto à formalidade, considero que o aluno referiu explicitamente e de maneira formal todo o seu raciocínio, e desse modo, atribuí o tipo de formalidade C. Desta forma, considero esta resolução mais adequada que as anteriores, visto que apesar de também mencionar que os vetores têm um “ponto em comum”, o aluno consegue concluir que os pontos A, B e C pertencem à mesma reta, percebendo que os vetores ao serem colineares e a extremidade $\overrightarrow{AB}$ coincidir com a origem de $\overrightarrow{BC}$, então a reta que contém os pontos A e B não pode ser paralela à reta que contém os pontos B e C, têm que ser coincidentes.

A resolução a seguir (Figura 28) é apresentada como exemplo do nível de complexidade 3A, sendo classificada com a formalidade mediana:

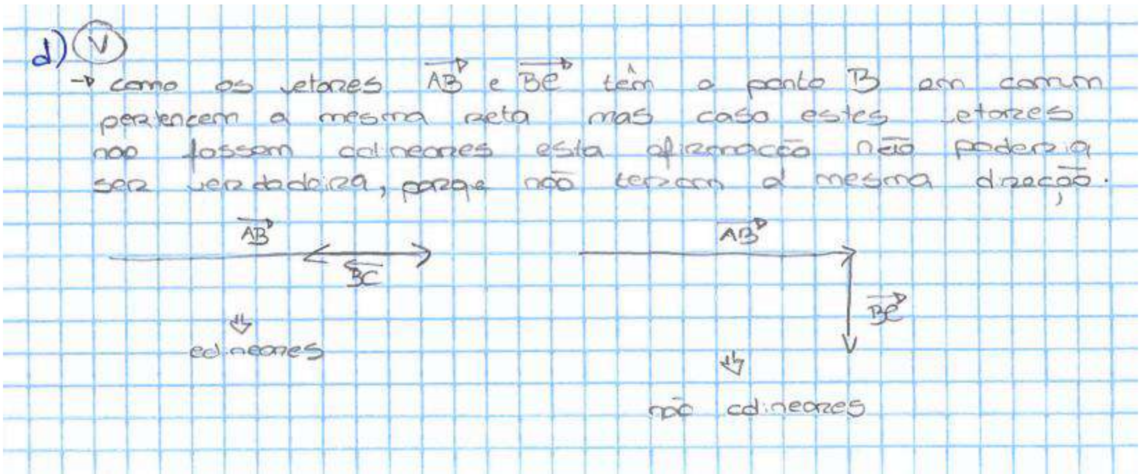
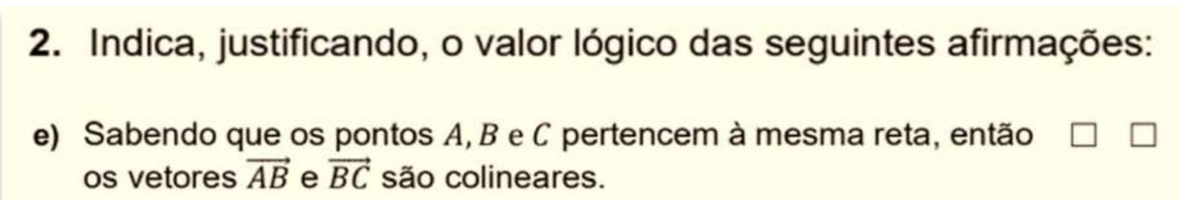


Figura 28: Resolução da Cláudia na Questão 2d) – Ficha de trabalho C

A Cláudia apresenta uma justificação que pode ser considerada uma tentativa de redução por absurdo, e saliento a palavra "tentativa", pois o que a aluna deveria ter explicado era se seria possível os pontos em causa não pertencerem à reta, e os vetores continuarem a serem colineares. Em vez disso, a aluna cita "mas caso estes vetores não fossem colineares esta afirmação não seria verdadeira", ou seja, a aluna sugere que a afirmação original é verdadeira, porque a seguinte afirmação: "Se os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ são **não** colineares, então os pontos A, B e C pertencem à mesma reta." é falsa. Esta justificação não respeita as propriedades da implicação, pois provar que $\sim p \Rightarrow q$ é falso, não é equivalente a provar que $p \Rightarrow q$ é verdadeiro. No entanto, a sua justificação baseia-se em princípios lógicos, o que me permite a classificar com o nível de complexidade 3A. Em termos de formalidade, fica implícito que a estratégia da aluna seria uma prova por redução ao absurdo, mas carece da sequência lógica apropriada, por isso lhe atribuí o tipo de formalidade B.

A discussão destas resoluções foi realizada na ficha de trabalho D – Parte I, por isso a apresentação de excertos da discussão coletiva e respetivos comentários será realizada na próxima ficha.

5.3.4. Questão 2 – alínea e)



2. Indica, justificando, o valor lógico das seguintes afirmações:

e) Sabendo que os pontos A, B e C pertencem à mesma reta, então os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ são colineares. ☐ ☐

Figura 29: Questão 2e) da Ficha de trabalho C

Esta alínea trata-se do recíproco da afirmação presente na alínea anterior, e tinha como objetivo averiguar se os alunos compreendiam a diferença entre as afirmações e se utilizavam um tipo distinto de justificação.

Tabela 16: Níveis de complexidade das justificações na Questão 2e) da Ficha de trabalho C

Questão 2e) (Ficha de trabalho C)	**Níveis de complexidade**						Não resolveu
	0	**1**	**2**	**3A**	**3B**	**3C**	
Nº de alunos	4					22	
Percentagem	15,4%					84,6%	

Tabela 17: Tipos de formalidade das justificações na Questão 2e) da Ficha de trabalho C

Questão 2e) (Ficha de trabalho C)	**Tipos de formalidade**			Não atribuível	Não resolveu
	A	**B**	**C**		
Nº de alunos		22			
Percentagem		100%			

Como as tabelas indicam, quatro alunos não apresentaram justificação e os restantes conseguiram justificar com base em propriedades ou procedimentos. Na formalidade, no entanto, de todos os que justificaram, nenhum conseguiu apresentar uma justificação formal e completa.

Dos alunos que apresentaram uma justificação de nível de complexidade 3C, apresento a resolução do Alexandre (Figura 30).

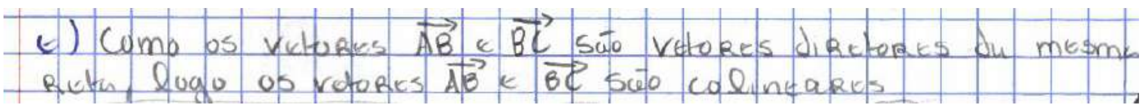

e) Como os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ são vetores diretores da mesma reta, logo os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ são colineares

Figura 30: Resolução do Alexandre na Questão 2e) – Ficha de trabalho C

O Alexandre, partindo do facto dos pontos A, B e C pertencerem à mesma reta, afirma que os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ são vetores diretores da reta, e como tal têm de ser colineares. Este aluno recorre à definição e às propriedades da equação vetorial de uma reta e da colinearidade de vetores, pelo que atribuí o nível de complexidade 3C. Quanto à formalidade, considero que o aluno deveria ter referido explicitamente por que conclui que $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ são "vetores diretores da mesma reta", e como tal, foi-lhe atribuído o tipo de formalidade B.

Quanto às resoluções sem justificação, apresento a resolução do Fábio (Figura 31).


e) Verdadeiro, pois se os pontos ~~vetores~~ pertencem à mesma reta, têm a mesma direção

Figura 31: Resolução do Fábio na Questão 2e) da Ficha de trabalho C

O Fábio, como se pode observar, comete a falácia de sugerir que os pontos têm a mesma direção, em vez de serem os vetores. Contudo, embora com essa correção, a sua justificação continuava a ser, quase que uma cópia da própria afirmação da alínea, por isso atribuí o nível de complexidade 0. Em seguida, apresento um excerto do diálogo com este aluno durante a discussão coletiva:

Fábio: Ãh…esqueci só de escrever os vetores.

Professor: E por não teres escrito os vetores, como achas que fica a tua justificação?

Fábio: …

Um outro aluno: Não fica válida, porque ele dá a entender que são os pontos que têm uma direção.

Fábio: Ah sim, mas pronto apenas esqueci.

Note-se como, apesar de não ter conseguido responder à pergunta, o aluno ainda continua a classificar o seu erro como um mero esquecimento, em vez de refletir mais sobre a validade da sua justificação. Perante esta situação, decidi incentivar o aluno a apresentar uma justificação alternativa:

Professor: Repara, qual a diferença entre o que escreveste e o que já vem escrito na alínea?

Fábio: Então... Se os pontos pertencem à mesma reta…[enquanto faz gestos com as mãos a indicar o desenho de uma reta] é óbvio que os vetores, como são formados por aqueles pontos…ou são representados por aqueles pontos…sejam colineares…

Professor: Agora já apresentaste um dado novo, já referes que se deve aos vetores terem como extremidades os pontos do enunciado, e se isso era óbvio, porque não incluíste na tua justificação?

Fábio: Por que… não sabia como devia escrever isso…

O aluno, quando desafiado, já consegue aproximar-se de uma justificação adequada, que não emerge diretamente da questão da ficha, mas sim a partir das questões diretas do professor e das contribuições parciais dos seus colegas. Esta situação revela como as discussões coletivas têm o potencial de convidar e guiar o aluno a desenvolver o seu raciocínio matemático, quando a ficha de trabalho por si só não alcança esse objetivo.

5.3.5. Questão 2 – alínea f)

2. Indica, justificando, o valor lógico das seguintes afirmações:

f) Se os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são colineares, os pontos A, B, C e D pertencem à mesma reta.

Figura 32: Questão 2f) da Ficha de trabalho C

Nesta alínea, a maioria dos alunos não apresentou dificuldades, sendo a justificação mais comum a representação visual de um contraexemplo. Dos alunos que tentaram justificar recorrendo a propriedades de retas e vetores, revelaram desconhecer que não é devido aos pontos que representam os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ serem distintos, que significa obrigatoriamente que os pontos A, B, C e D não podem pertencer à mesma reta.

Tabela 18: Níveis de complexidade das justificações na Questão 2f) – Ficha de trabalho C

Questão 2f) (Ficha de trabalho C)	**Níveis de complexidade**						Não resolveu
	0	**1**	**2**	**3A**	**3B**	**3C**	
Nº de alunos				22		4	
Percentagem				84,6%		15,4%	

Tabela 19: Tipos de formalidade das justificações na Questão 2f) da Ficha de trabalho C

Questão 2f) (Ficha de trabalho C)	**Tipos de formalidade**			Não atribuível	Não resolveu
	A	**B**	**C**		
Nº de alunos			26		
Percentagem			100%		

Inicio a exemplificação das situações ocorridas, com a resolução do Tiago (Figura 33).

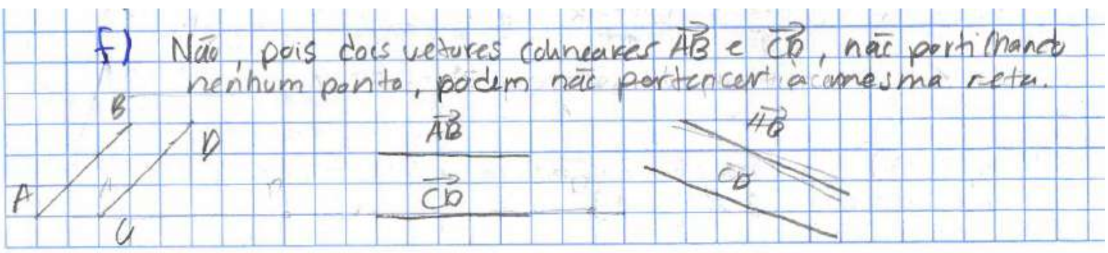


Figura 33: Resolução do Tiago na Questão 2f) da Ficha de trabalho C

Nesta resolução, o aluno apresenta três contraexemplos (nível de complexidade 3A), e refere explicitamente e de forma completa (tipo de formalidade C), que os vetores serem colineares, não significa necessariamente que os pontos têm de pertencer à mesma reta. A palavra que considero mais importante nesta resolução é o “podem”, pois o aluno revela compreender que a primeira proposição, não implica a veracidade da segunda, mas que é possível os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ serem colineares, e os pontos A, B, C e D pertencerem à mesma reta, ao contrário do que afirmam alguns dos seus colegas.

Comparando com a resolução do Luís (Figura 34), que é o espelho de todas as resoluções a qual atribuí o nível de complexidade 3C, as resoluções deste nível de complexidade partem do pressuposto de que como os vetores são colineares e não têm “pontos em comum”, então os pontos que não pertencem à mesma reta, têm que obrigatoriamente definir duas retas paralelas. Existe aqui uma clara confusão no uso das propriedades das retas e dos vetores, além da utilização inapropriada de termos, tal como sugerir que os vetores têm pontos em comum, posto que os pontos representam os vetores, não lhes pertencem.

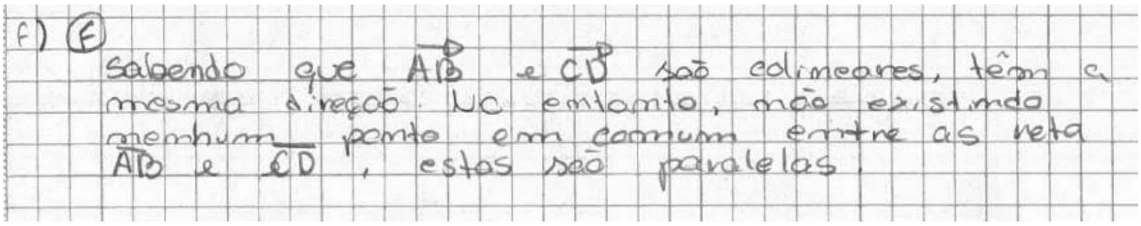


Figura 34: Resolução do Luís na Questão 2f) da Ficha de trabalho C

5.3.6 Ações do Professor e Dificuldades dos alunos

Na questão 1.a) os alunos não evidenciaram dificuldades em compreender que para refutar a afirmação podiam usar contraexemplos (nível 3A), tendo esta sido a estratégia adotada pela maior parte dos alunos. Quanto à formalidade, apesar de ter havido 61,5% de justificações formais incompletas, bastou, principalmente a ação de **convidar** para os alunos, em discurso oral, imediatamente completarem a sua justificação.

Na questão 1.b) as únicas dificuldades foram as retratadas com as resoluções da Clara e do Fábio, ambas relacionadas às propriedades do intervalo definido para o parâmetro k. Na comparação das resoluções, visto que as dificuldades estavam conectadas, apenas foi necessário **guiar** os alunos a observarem as semelhanças e diferenças, o que conduziu a uma rápida identificação dos erros e a uma melhor compreensão dos conceitos matemáticos abordados no exercício. Destaco ainda, uma grande melhoria na clareza como apresentaram o seu raciocínio, visto que 76,9% dos alunos realizaram uma justificação formalmente completa.

Na questão 2.d), todos os alunos tinham noção que o valor lógico da afirmação era verdadeiro, mas foram poucos os que conseguiram distanciarem-se das perceções visuais para conseguir justificar a sua resposta. Isto conduziu a várias resoluções, em que a justificação se tratava da própria afirmação, ou de uma descrição da perceção que obtiveram da situação, por vezes escrita com pouco rigor matemático.

Na questão 2.e), o motivo de todas as justificações apresentadas serem classificadas com o tipo B de formalidade, foi nenhum aluno ter explicitado na sua justificação que os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ eram vetores diretores da mesma reta, porque tinham como extremidades os pontos do enunciado. No entanto, no momento de discussão coletiva, até um aluno que não tinha apresentado uma justificação válida por escrito, conseguiu oralmente, quando **desafiado** e apoiado pelos seus colegas, abordar o elemento da situação que foi a causa da incompletude de todas as justificações.

Na questão 2.f), não houveram dificuldades a destacar, tanto os alunos que apresentaram uma justificação com base em princípios lógicos, como os com base em propriedade ou procedimentos, conseguiram realizar uma justificação formalmente completa. Assim, na discussão, apenas **desafiei** os alunos a serem eles a destacar as semelhanças e diferenças entre resoluções, e conseguirem o fazer com pouco esforço.

Na introdução da presente ficha de trabalho, como na perspetiva dos alunos, todas as questões pareciam à partida de resposta simples, nenhum aluno colocou questões neste momento. Durante a realização da ficha, a questão 1.a) e a questão 2.d) foram as que mais alunos chamaram a minha atenção, para saberem se a sua justificação estava correta, o que me levou a responder com questões de confirmação, ou de inquirição, dependendo da validade da justificação. No momento da discussão coletiva foi a comparação entre resoluções, auxiliada com as ações de **guiar** e **desafiar,** que mais ajudaram os alunos a superar as suas dificuldades quanto aos conceitos empregues e na formulação de justificações.

5.4. Ficha de trabalho D – Parte I

A ficha de trabalho D – Parte I possui quatro questões. Nas duas primeiras os alunos tinham que interpretar as resoluções que já comentei na questão 2.d) da ficha de trabalho C, e classificar as justificações presentes com as expressões enunciadas, como se pode observar pela seguinte figura:

Questões

1. Qual das resoluções A, B, C ou D, consideras que apresenta uma melhor fundamentação? Justifica a tua resposta.

2. Classifica cada uma dessas justificações, utilizando as expressões: "não válida", "incompleta", "completa", e ordena-as de 1 a 4, em que 1 é não válida e 4 é a mais completa. Fundamenta a tua resposta

Figura 35: Questões 1 e 2 da Ficha de trabalho D – Parte I

As outras duas questões estavam relacionadas com as resoluções de cada aluno, onde tinham que avaliar a sua própria justificação e considerar maneiras de aprimorá-la, se necessário.

Revê agora a justificação do teu grupo.

3. Consideras que é uma justificação válida? Porquê?

4. Caso não consideres a justificação do teu grupo válida e/ou completa, explica como a poderias melhorar.

Figura 36: Questões 3 e 4 da Ficha de trabalho D – Parte I

5.4.1. Questão 1

Começando pela primeira questão (Figura 35), dos vinte e seis alunos autorizados a participar no estudo, dezoito alunos optaram pela resolução D, e oito alunos escolheram a resolução A.

Um exemplo do motivo da resolução A, ter sido a segunda mais escolhida, encontra-se na resolução do Mário (Figura 37).

A resolução A pois explica todas as razões para a afirmação ser verdadeira, ao explicar o caso contrário.

Figura 37: Resolução do Mário na Questão 1 da Ficha de trabalho D – Parte I

A fundamentação do Mário, apesar de ser insuficiente por citar que na resolução A são explicadas todas as razões e não salientar quais, apresenta o motivo pelo qual tantos alunos consideraram esta resolução com a melhor justificação: o facto de ter explicado o "caso contrário".

Portanto, quando os alunos escolheram a resolução A como a que tem melhor fundamentação, consideraram que quando a Cláudia (autora da resolução A) explicou que $\sim p \Rightarrow q$ é falso, ela estaria a explicar o "caso contrário", e que isso seria equivalente a justificar a veracidade do caso original ($p \Rightarrow q$). Esta dificuldade, no entanto, é compreensível, visto que o domínio da lógica e teoria dos conjuntos não é um conteúdo obrigatório a lecionar, por não fazer parte das Aprendizagens Essenciais do 10.º ano de Matemática. Contudo, os autores da resolução A e os oito alunos que a apoiaram, constituem um exemplo de como os alunos tendem a aplicar processos lógicos de maneira intuitiva nas suas justificações, com a perceção de que isso lhes permite formular uma justificação válida, mas depois desconhecem as propriedades envolvidas.

Em seguida, irei destacar alguns excertos da discussão coletiva com os autores da resolução A e com os alunos que a escolheram, em resposta à questão 1 desta ficha.

Professor: (...) Vi que foram vários alunos que escolheram esta resolução, então porque a escolheram?

Aluno 1: Porque explica que não poderia ser de outra forma… a afirmação tinha de ser verdadeira.

Professor: E onde é que interpretaram na resolução que não poderia ser de outra forma?

(...)

Aluno 2: Quando é dito que se os vetores não fossem colineares já não dava.

Professor: Entendi. Mais alguma razão?

Aluno 2: Ãh…além de ter falado do contrário… na resolução também está ilustrado com os desenhos, o que queriam dizer.

Neste momento, é nítido, que quem optou pela resolução A, achou que nela estava a ser aplicada a lógica associada ao método de redução ao absurdo, pois na opinião dos alunos, na resolução A, estava a ser explicado que a afirmação tinha de ser verdadeira, porque ao "contrário" seria falsa. As ilustrações referidas pelo Aluno 2, de facto, representam o que foi anteriormente escrito em linguagem natural, mas a transição da representação verbal para a visual, não torna a justificação adequada.

Enunciadas as razões do porquê de alguns alunos terem optado pela resolução A, pedi à autora da resolução para explicar o seu raciocínio:

Cláudia: (...) Então, eu expliquei verbalmente e geometricamente porque a afirmação tinha de ser verdadeira.

Professor: Sim, isso eu percebi, mas diz-me porque é que se os vetores não forem colineares a afirmação já não é verdadeira.

Cláudia: Isso está no segundo desenho [enquanto aponta para ele] … aqui estão dois vetores não colineares, e como não têm a mesma direção, os pontos não vão pertencer à mesma reta.

Professor: Muito bem, todos perceberam isso? [alunos concordando com a cabeça] Mas como é que isso prova que a afirmação… que copiei de novo para esta ficha, é verdadeira?

Cláudia: Ãh… deixe pensar um bocadinho.

(...)

Cláudia: Isto é, aquilo que os meus colegas disseram há pouco… como não dá ao contrário… então é tem que ser verdadeira…

Professor: E o que seria o contrário da afirmação original?

Cláudia: Pois… acho que não foi aquilo que fiz

(...)

Professor: Alguém que tenha escolhido a resolução A, o que seria o contrário da afirmação original?

(...)

Professor: Bom… e os restantes, alguém sabe dizer qual seria o contrário?

Aluno 3: O contrário não seria inverter a ordem? (...) Tipo, provar que se os pontos não pertencerem à mesma reta, então os vetores são não colineares?

Professor: Exatamente, muito bem, era onde queria que vocês chegassem…

Durante esta discussão, percebe-se que a Cláudia, efetivamente, tinha como objetivo chegar numa contradição para provar a veracidade da afirmação, mas por desconhecimento do processo, não o conseguiu fazer. A palavra "contrário", casualmente usada pelos alunos, trata-se da negação da implicação ($\sim(p \Rightarrow q)$), e não foi isso que ficou justificado, quanto muito, apenas se abordou a inversão da afirmação ($\sim p \Rightarrow \sim q$). Porém, considero relevante salientar, que quando solicitei aos alunos para clarificar o significado de "contrário", estes começaram a duvidar se tinham interpretado bem a resolução, ou se apenas tinham entendido a intenção, e a escolheram por impulso.

Depois desta discussão, como não era minha intenção aprofundar-me no domínio da lógica, apenas foi explicado a diferença entre negar e inverter uma implicação, e pedi aos alunos para compararem a resolução A com a resolução escrita na figura 6, de modo a abordar brevemente o método de redução ao absurdo.

A respeito dos alunos que optaram pela resolução D, pode-se observar a resolução da Marina.

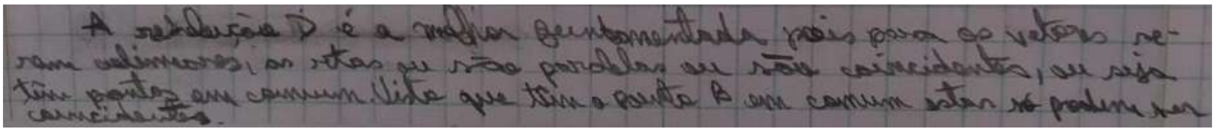

A resolução D é a melhor fundamentada pois para os vetores serem colineares, as retas que são paralelas ou são coincidentes, ou seja têm pontos em comum. Visto que têm o ponto B em comum estas só podem ser coincidentes.

Figura 38: Resolução da Marina na Questão 1 da Ficha de trabalho D – Parte I

A Marina, assim como todos os alunos que escolheram a resolução D, conseguiu interpretar corretamente a justificação: devido aos vetores serem colineares, as retas que continham os pontos que representavam esses vetores, ou eram paralelas ou coincidentes, como a extremidade de um dos vetores coincidia com a origem do outro, então as retas eram, necessariamente, coincidentes.

5.4.2. Questão 2

Quanto à discussão, como observei que nos dezoito alunos que selecionaram esta resolução, não houve dificuldades na interpretação, decidi introduzir a discussão coletiva da questão 2 e verificar se havia algum aluno que não tinha percebido a resolução D, e por essa razão tivesse escolhido a resolução A como aquela com melhor fundamentação, mas para espanto meu, isso não aconteceu. Quem considerou a justificação “A” como a mais completa, classificou a justificação “D” como completa, sendo que a única diferença apontada foi que na resolução A haviam duas ilustrações, tal como refere à aluna Bruna (Figura 39):

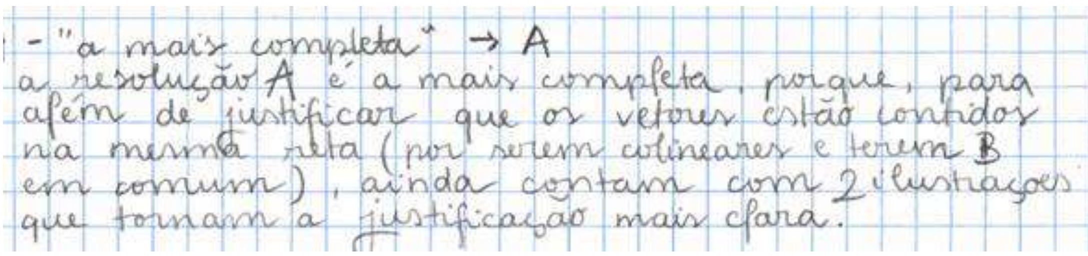

- "a mais completa" → A
a resolução A é a mais completa, porque, para além de justificar que os vetores estão contidos na mesma reta (por serem colineares e terem B em comum), ainda contam com 2 ilustrações que tornam a justificação mais clara.

Figura 39: Resolução da Bruna na Questão 2 da Ficha de trabalho D – Parte I

O destaque que deram a esta diferença, revela como os alunos valorizam as conexões entre representações matemáticas, como uma forma de tornar o discurso matemático mais claro. Portanto, não são apenas os Professores que caracterizam o uso e a relação entre representações matemáticas de particular importância (NCTM, 2017), os alunos também compreendem que utilizar múltiplas formas de representação os apoia na justificação do seu raciocínio.

Em relação a quem optou pela “D” como a mais completa na questão 2, houve alunos que consideraram a justificação na “A” como incompleta e outros como inválida. Dos que a classificaram como incompleta, a razão foi que na primeira frase da resolução faltou mencionar que os vetores eram colineares, ou seja, deveria ser: “…como os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ **são colineares** têm o ponto B em comum…”. Pois, sem esta menção, segundo os alunos, haveria um “salto lógico”, porque, em seguida, na resolução é referido, “mas caso estes vetores não fossem colineares…”. Sobre quem categorizou como inválida, que foram três alunos, apenas comentaram que não compreendiam se na resolução A estava justificado para vetores colineares ou para vetores não colineares. Eu considero ambas as opiniões legítimas, até porque as duas estiveram implicitamente presentes na discussão sobre a resolução A.

A respeito das justificações presentes nas resoluções B e C, estas foram unanimemente classificadas como “não válidas”. O motivo apresentado para a categorização da “B” está exemplificado nas resoluções da Isabel e do Gabriel (Figuras 40 e 41), como se pode verificar ambos mencionam, corretamente, que não é por a extremidade de um vetor coincidir com a origem de outro, que permite dizer que os vetores são colineares.

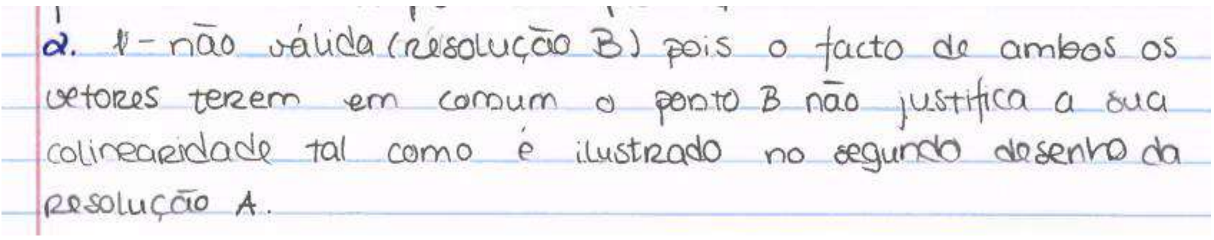

2. B - não válida (resolução B) pois o facto de ambos os vetores terem em comum o ponto B não justifica a sua colinearidade tal como é ilustrado no segundo desenho da resolução A.

Figura 40: Resolução da Isabel na Questão 2 da Ficha de trabalho D – Parte I

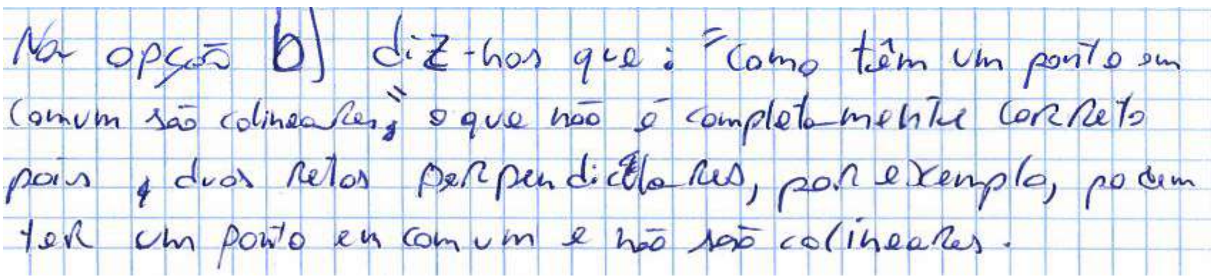

Na opção b) diz-nos que: "Como têm um ponto em comum são colineares" o que não é completamente correto pois duas retas perpendiculares, por exemplo, podem ter um ponto em comum e não são colineares.

Figura 41: Resolução do Gabriel na Questão 2 da Ficha de trabalho D – Parte I

Na resolução do Rui e da Margarida (Figuras 42 e 43), é possível observar que os alunos atribuíram a expressão “não válida” à resolução C, porque não foi utilizada uma “linguagem matemática adequada”, não foi indicado que os vetores eram colineares, e o argumento utilizado de que por ter “um ponto em comum”, logo os pontos pertencem à mesma reta, é semelhante ao que consta na resolução B, que já foi provado nas resoluções anteriores como falso.

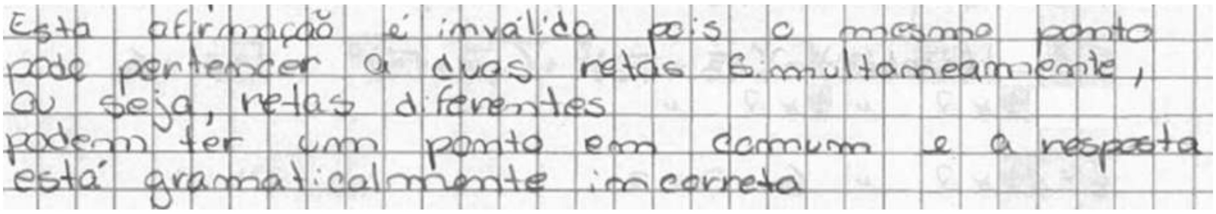

Esta afirmação é inválida pois o mesmo ponto pode pertencer a duas retas simultaneamente, ou seja, retas diferentes podem ter um ponto em comum e a resposta está gramaticalmente incorreta

Figura 42: Resolução do Margarida na Questão 2 da Ficha de trabalho D – Parte I

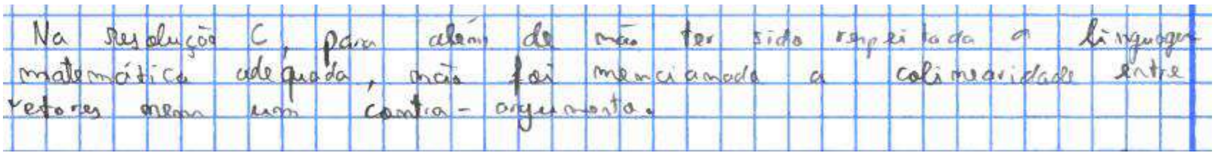

Na resolução C, para além de não ter sido respeitada a linguagem matemática adequada, não foi mencionada a colinearidade entre vetores nem um contra-argumento.

Figura 43: Resolução do Rui na Questão 2 da Ficha de trabalho D – Parte I

5.4.3. Ações do Professor e Dificuldades dos alunos – Questão 1 e 2

Os alunos que optaram pela resolução A como a melhor fundamentada e a sua autora, manifestaram inicialmente dificuldades de interpretação e falta de conhecimento quanto às propriedades da implicação. Quanto a este conhecimento, não considero que ao ter explicado com alguns exemplos a diferença entre negar e inverter uma implicação, tenha conseguido que todos os alunos entendessem as propriedades que estão a ser aplicadas. Estas só seriam, efetivamente, compreendidas com a lecionação do domínio da lógica e teoria dos conjuntos. No entanto, acho que ao ter **desafiado** os alunos a tentar explicar, o que seria o "contrário" da afirmação apresentada, estes começaram a duvidar da sua interpretação, conseguindo chegar, por fim, à negação da afirmação original, e perceber porque a justificação apresentada pela Cláudia não era adequada.

Quem escolheu a resolução D seja como completa ou mais completa, conseguiu interpretar corretamente a justificação, utilizando as suas próprias palavras. Quanto às resoluções B e C, todos os alunos as classificaram como "não válidas", a "B" porque não é por a extremidade de um vetor coincidir com a origem de outro, que permite dizer que os vetores são colineares, e a "C" os argumentos foram mais variados, como a utilização de uma linguagem matemática pouco adequada, e a não foi indicado de que os vetores eram colineares.

Portanto, os alunos tiverem poucas dificuldades em interpretar e comentar as resoluções B, C e D. Apenas houve maiores dificuldades na justificação presente na resolução A devido ao desconhecimento dos alunos acerca dos processos lógicos aplicados.

5.4.4. Questões 3 e 4

No que diz respeito às questões 3 e 4 desta ficha, estas serão analisadas em conjunto, com foco nas modificações que os autores das resoluções A, B ,C e D fizeram, devido a constituírem um resumo da quantidade de justificações de natureza diversa.

Iniciando pela respetiva ordem, a autora da resolução A, após a discussão das questões 1 e 2, definiu a sua justificação como válida e incompleta, porque considerou que pelas ilustrações era percetível que estava a tentar encontrar uma contradição, só que depois enganou-se na forma como se exprimiu. Em seguida, apresento a melhoria efetuada por esta aluna na questão 4 (Figura 44):

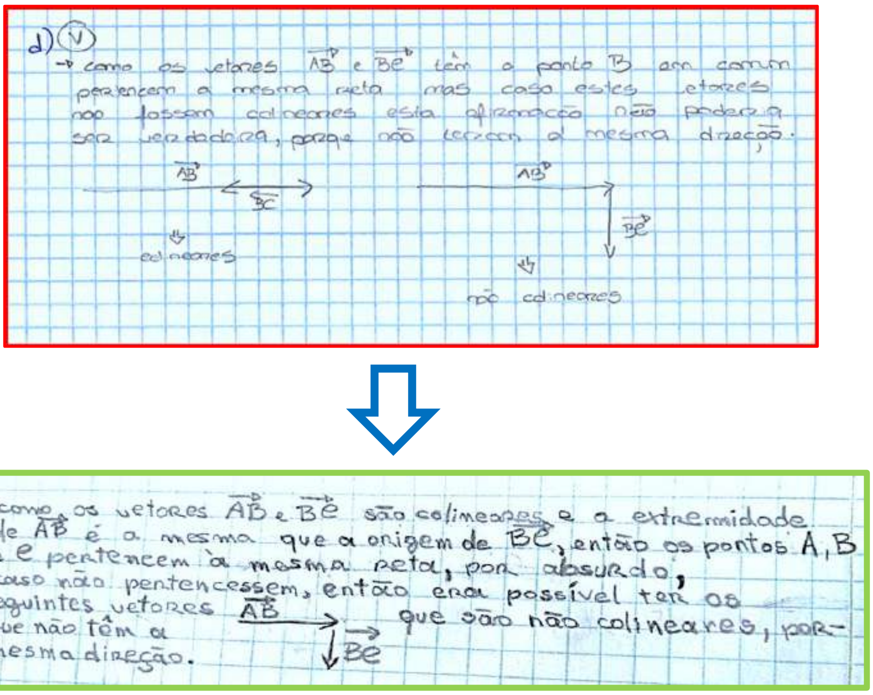


Figura 44: Melhoria entre a resolução anterior e a nova resolução da Cláudia na Questão 4 da Ficha de trabalho D – Parte I

Como se pode verificar a aluna já apresenta uma justificação por absurdo, ao argumentar que $p \Rightarrow q$ é verdadeira, porque supôs que "q" era falso e provou que "p" também o era. Portanto, a aluna conseguiu identificar o que era necessário melhorar e conseguiu apresentar uma justificação válida e completa.

Prosseguindo para "B", a sua autora, considerou o seguinte a respeito da sua resolução:

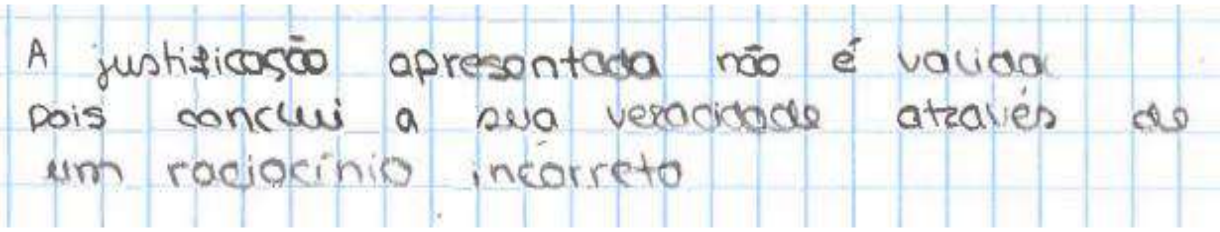

A justificação apresentada não é valida pois conclui a sua veracidade através de um raciocínio incorreto

Figura 45: Resolução da Clara na Questão 3 da Ficha de trabalho D – Parte I

Esta resposta foi bastante interessante, porque mostra como os alunos começaram a entender que uma justificação que se baseia numa premissa incorreta, a torna inválida.

Quanto à melhoria, a aluna apenas disse o seguinte:

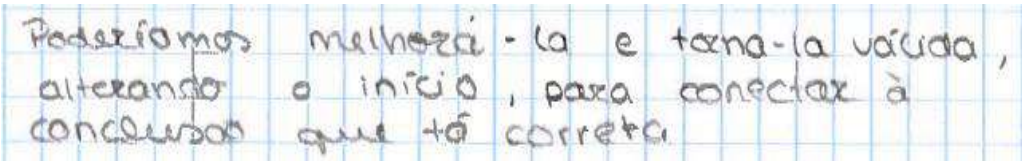
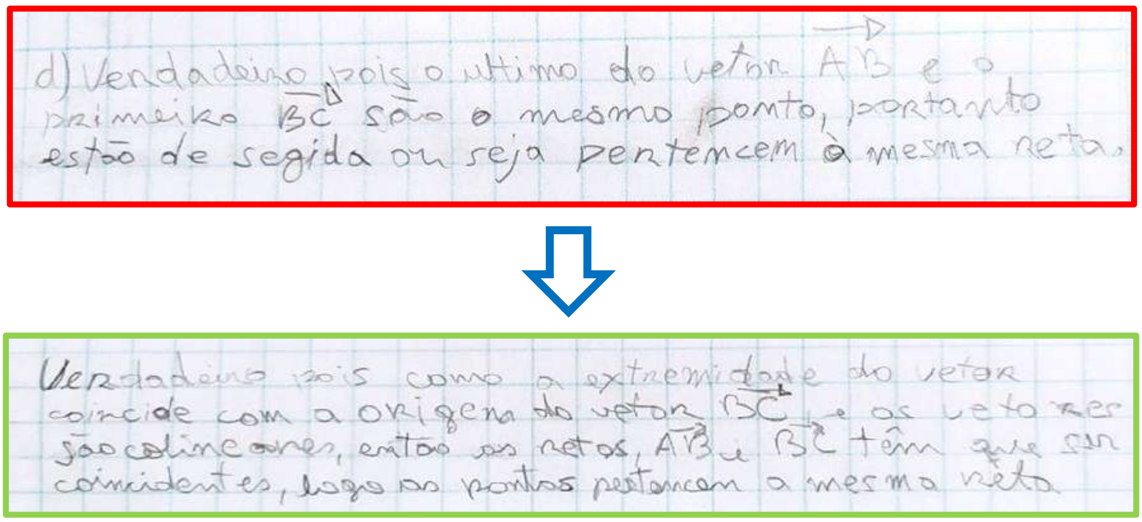

Poderíamos melhorá-la e torná-la válida, alterando o início, para conectar à conclusão que tá correta

Figura 46: Resolução da Clara na Questão 4 da Ficha de trabalho D – Parte I

Efetivamente, era necessário alterar o "início" da resolução, e a conclusão estava correta, no entanto, não foi conclusiva sobre a forma como o faria.

Quanto à resolução C, o seu autor, apenas explicou oralmente que não considerava a sua resolução como válida, porque faltou mencionar que os vetores eram colineares, e devia ter utilizado uma linguagem mais apropriada. Na questão 4, como se pode verificar na figura 47, o aluno apresentou uma justificação semelhante à da resolução D. Portanto o aluno, por comparação, observou que a justificação na resolução D era válida e completa, e conseguiu formular, por palavras suas, uma justificação de iguais características (Figura 47).


d) Verdadeiro pois o ultimo do vetor $\overrightarrow{AB}$ e o primeiro $\overrightarrow{BC}$ são o mesmo ponto, portanto estão de segida ou seja pentencem à mesma reta.

Verdadeiro pois como a extremidade do vetor coincide com a origem do vetor $\overrightarrow{BC}$, e os vetores são colineares, então as retas, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ têm que ser coincidentes, logo os pontos pertencem a mesma reta

Figura 47: Melhoria entre a resolução anterior e a nova resolução do David na Questão 4 da Ficha de trabalho D – Parte I

O autor da resolução D, na questão 3, apenas repetiu o que já havia sido dito acerca da sua justificação, que era válida e completa, por apresentar um argumento que envolvia uma relação entre as propriedades da colinearidade de vetores e as retas paralelas e coincidentes. Na questão 4, visto que o aluno já tinha uma justificação adequada, tentei incentivá-lo a apresentar uma justificação alternativa, e o resultado foi o seguinte (Figura 48):

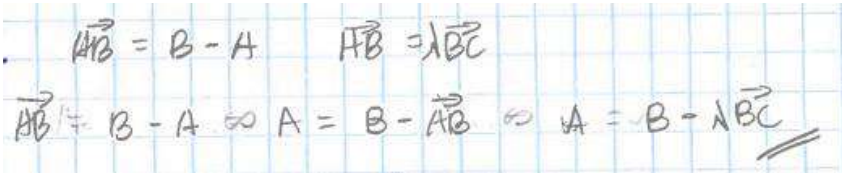


Figura 48: Resolução do Rui na Questão 4 da Ficha de trabalho D – Parte I

Nesta justificação, o objetivo foi justificar que o ponto A, podia ser obtido pela soma algébrica do ponto B com o vetor $\overrightarrow{BC}$, pois isto significaria que o ponto A é um ponto da reta que passa no ponto B e admite o vetor $\overrightarrow{BC}$ como vetor diretor, e, portanto, o ponto A, B e C estariam na mesma reta.

5.4.5. Ações do Professor e Dificuldades dos alunos – Questões 3 e 4

Com estas duas últimas questões, foi possível verificar o impacto que a discussão coletiva acerca das duas questões anteriores tiveram na compreensão dos conceitos e nas justificações dos alunos.

A Cláudia conseguiu melhorar a sua justificação e apresentar uma justificação válida e completa, seguindo a lógica de redução ao absurdo. A Clara, comenta o que teria de melhorar, mas não apresenta uma resolução alternativa. O David apresentou uma nova justificação, com características semelhantes à da resolução D, e com uma utilização correta da linguagem matemática, também conseguindo formular uma justificação válida e completa. O Rui, como já tinha uma justificação adequada, o **desafiei** a apresentar uma justificação alternativa, tendo este conseguido realizar uma justificação recorrendo à linguagem algébrica. A única dificuldade deste aluno foi, no entanto, compreender que esta nova resolução estava incompleta, pois era necessário incluir na justificação, uma explicação acerca da estratégia adotada, ou seja, considerou que os símbolos e o procedimento empregues, eram esclarecedores por si só. Esta dificuldade é bastante recorrente durante o uso de representações simbólicas (Mata-Pereira, 2018), devido aos alunos considerarem que existe certa volatilidade na forma como alguns procedimentos devem ser clarificados e outros não.

5.5. Ficha de trabalho D – Parte II

Na Parte II, os alunos tiverem menos tempo que o planeado para a resolverem, por conta da discussão da Parte I ter demorado mais tempo que o espectável, e como consequência alguns alunos não tiveram tempo de resolvê-la e não houve discussão coletiva. Nesse sentido, foi pedido para esses alunos terminarem em casa e que, assim como nas outras fichas, iria dar-lhes, posteriormente, o meu *feedback*.

5.5.1. Questão 1 - alínea a)

> a) Determina as coordenadas do ponto Q e averigua se o segmento de reta [PQ] é um diâmetro da superfície esférica S. Justifica a tua resposta.

Figura 49: Questão 1a) da Ficha de trabalho D – Parte II

Em termos de nível de complexidade, todos os alunos que tentaram resolver a questão apresentaram uma justificação de nível de complexidade 3C. Quanto à formalidade, embora com a oportunidade de resolverem em casa, ainda houve uma minoria que apresentou justificações com o tipo B de formalidade, como se pode observar nas seguintes tabelas:

Tabela 20: Níveis de complexidade das justificações na Questão 1a) da Ficha de trabalho D (Parte II)

Questão 1a) (Ficha de trabalho D – Parte II)	**Níveis de complexidade**						Não resolveu
	0	**1**	**2**	**3A**	**3B**	**3C**	
Nº de alunos						23	3
Percentagem						100%	-

Tabela 21: Tipos de formalidade das justificações na Questão 1.a) da Ficha de trabalho D (Parte II)

Questão 1a) (Ficha de trabalho D – Parte II)	**Tipos de formalidade**			Não atribuível	Não resolveu
	A	**B**	**C**		
Nº de alunos		7	16		3
Percentagem		30,4%	69,6%		-

Começando com um exemplo de uma justificação com o tipo B de formalidade, apresento a resolução do Matias (Figura 50).

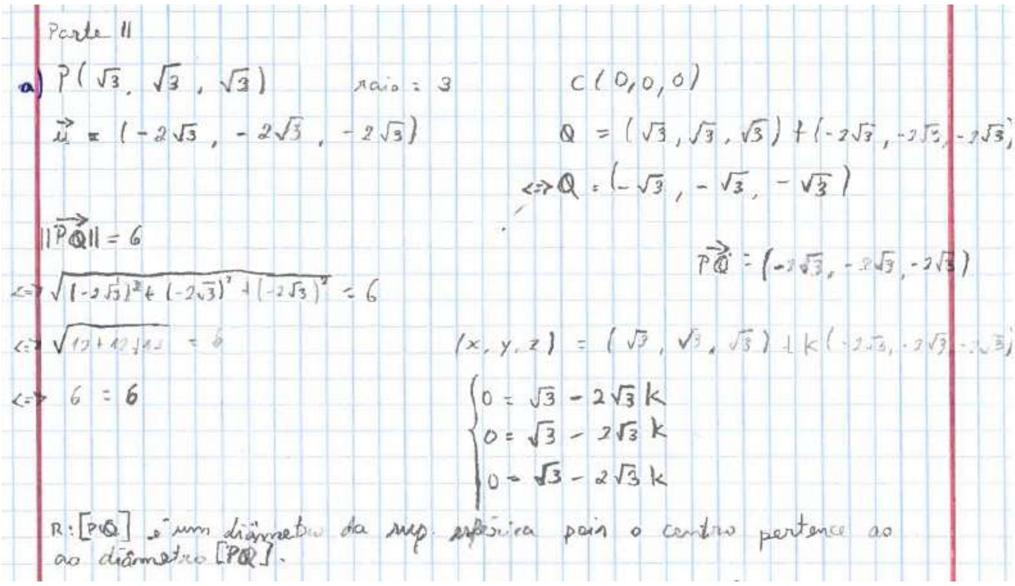


Figura 50: Resolução do Matias na Questão 1a) da Ficha de trabalho D – Parte II

O Matias recorre às propriedades e aos procedimentos do cálculo vetorial para determinar a norma do vetor $\overrightarrow{PQ}$, que era um dos passos necessários para justificar que o segmento de reta $[PQ]$ se tratava de um diâmetro, e por isso atribuí à justificação o nível 3C de complexidade. No que concerne à formalidade, a classificação atribuída deve-se a duas situações: a primeira advém do aluno não abordar na sua resposta que a norma do vetor $\overrightarrow{PQ}$ é o dobro da medida do raio, apesar de ter a calculado; a segunda resulta de ter mencionado que $[PQ]$ é um diâmetro, devido ao centro da esfera pertencer a esse segmento, mas não concluiu a resolução do sistema de equações paramétricas para justificar esse argumento. Portanto, a justificação não está completa.

Por comparação com a resolução da Ana (Figura 51), que também obteve o mesmo tipo de formalidade que o Matias.

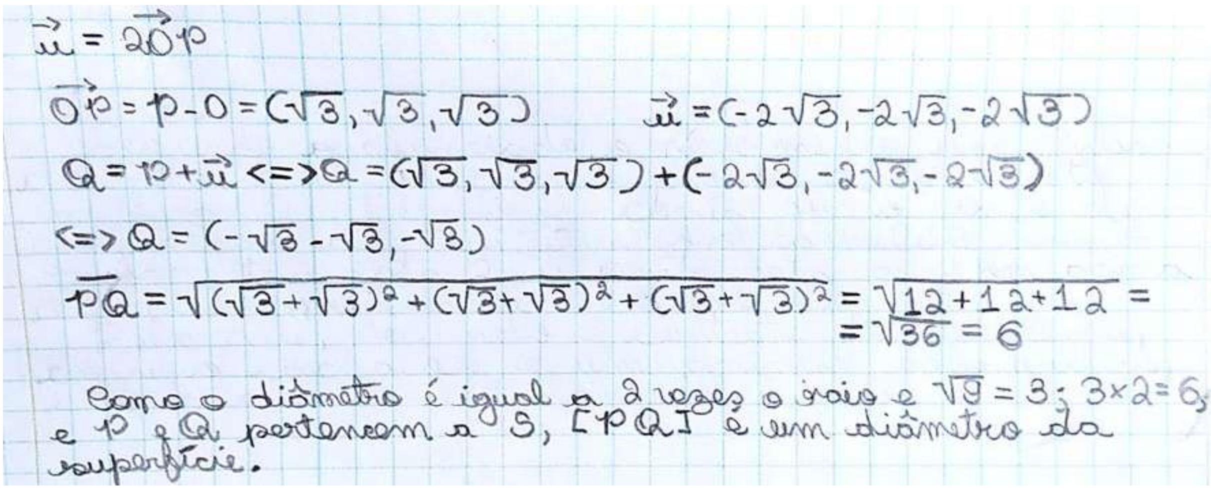
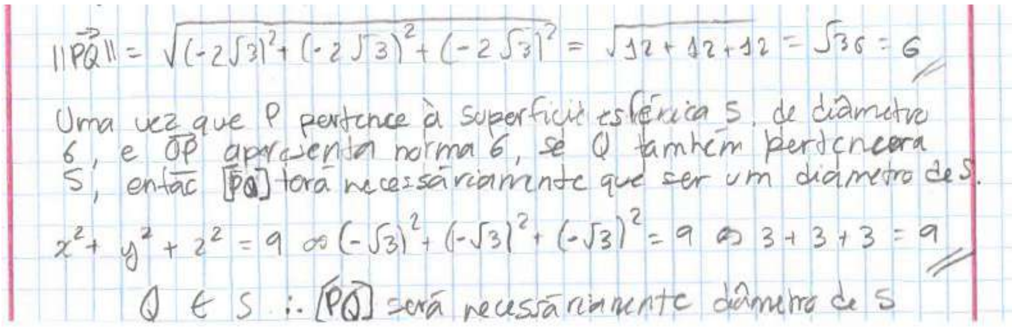


Figura 51: Resolução da Ana na Questão 1a) da Ficha de trabalho D – Parte II

Esta aluna já justifica, embora com uma linguagem que deveria ser mais apropriada, que o diâmetro da superfície esférica e a norma do vetor $\overrightarrow{PQ}$ coincidem, mas depois refere que os pontos P e Q pertencem à superfície esférica S, sem apresentar qualquer argumento que justifique essa afirmação, sendo apenas necessário justificar para o ponto Q, pois é referido no enunciado que P pertence a S.

Com a mesma estratégia da Ana, mas com uma justificação do tipo C de formalidade, apresento a parte final da resolução do Samuel (Figura 52):



$\|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2+(-2\sqrt{3})^2+(-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{12+12+12} = \sqrt{36} = 6$

Uma vez que P pertence à superfície esférica S, de diâmetro 6, e $\overrightarrow{OP}$ apresenta norma 6, se Q também pertencera S, então [PQ] terá necessariamente que ser um diâmetro de S.

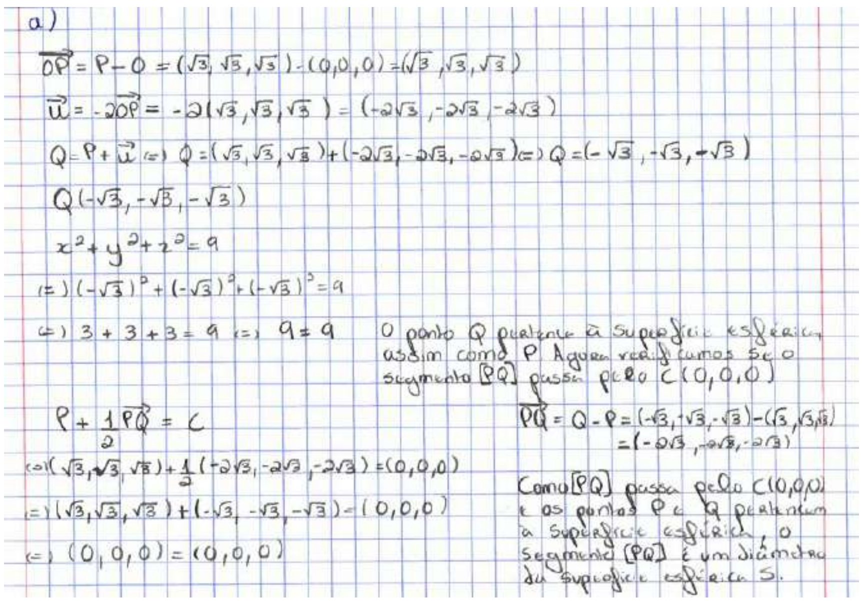
$x^2+y^2+z^2=9 \Leftrightarrow (-\sqrt{3})^2+(-\sqrt{3})^2+(-\sqrt{3})^2=9 \Leftrightarrow 3+3+3=9$

$Q \in S$ ∴ [PQ] será necessariamente diâmetro de S

Figura 52: Parte da resolução do Samuel na Questão 1a) da Ficha de trabalho D – Parte II

Como se pode verificar o aluno aborda os mesmos tópicos presentes na resolução da Ana, mas utiliza uma linguagem matemática adequada e apresenta os cálculos que justificam que o ponto $Q \in S$.

Outra estratégia igualmente válida para justificar que $[PQ]$ é um diâmetro, e escrita de maneira formal e completa (tipo de formalidade C), está exemplificada na resolução do Mateus (Figura 53).



a)

$\overrightarrow{OP} = P - O = (\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{3})-(0,0,0)=(\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{3})$

$\vec{u} = -2\overrightarrow{OP} = -2(\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{3}) = (-2\sqrt{3},-2\sqrt{3},-2\sqrt{3})$

$Q = P+\vec{u} \Leftrightarrow Q = (\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{3})+(-2\sqrt{3},-2\sqrt{3},-2\sqrt{3}) \Leftrightarrow Q=(-\sqrt{3},-\sqrt{3},-\sqrt{3})$

$Q(-\sqrt{3},-\sqrt{3},-\sqrt{3})$

$x^2+y^2+z^2=9$

$\Leftrightarrow (-\sqrt{3})^2+(-\sqrt{3})^2+(-\sqrt{3})^2=9$

$\Leftrightarrow 3+3+3=9 \Leftrightarrow 9=9$

O ponto Q pertence à superfície esférica, assim como P. Agora verificamos se o segmento [PQ] passa pelo C(0,0,0)

$P+\frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}=C$

$\overrightarrow{PQ}=Q-P=(-\sqrt{3},-\sqrt{3},-\sqrt{3})-(\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{3})$
$=(-2\sqrt{3},-2\sqrt{3},-2\sqrt{3})$

$\Leftrightarrow (\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{3})+\frac{1}{2}(-2\sqrt{3},-2\sqrt{3},-2\sqrt{3})=(0,0,0)$

$\Leftrightarrow (\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{3})+(-\sqrt{3},-\sqrt{3},-\sqrt{3})=(0,0,0)$

$\Leftrightarrow (0,0,0)=(0,0,0)$

Como [PQ] passa pelo C(0,0,0) e os pontos P e Q pertencem à superfície esférica, o segmento [PQ] é um diâmetro da superfície esférica S.

Figura 53: Resolução do Mateus na Questão 1a) da Ficha de trabalho D – Parte II

O Mateus, ao contrário dos anteriores colegas, não faz uso da norma do vetor $\overrightarrow{PQ}$. A sua justificação consistiu em apresentar e esclarecer os cálculos que provavam que o centro da esfera pertencia ao segmento de reta $[PQ]$, e que P e Q pertenciam ambos à superfície esférica S.

5.5.2. Questão 1 - alínea b)

> b) Podemos generalizar o resultado da alínea anterior considerando P um ponto qualquer da superfície esférica S? Fundamenta a tua resposta.

Figura 54: Questão 1b) da Ficha de trabalho D – Parte II

Esta alínea estava dependente da anterior, então quem não resolveu a alínea a), também não resolveu a alínea b). Obviamente que em situação de avaliação sumativa, é desaconselhável criar alíneas que dependam de outras, mas com esta alínea, e com a alínea c), queria verificar se teria havido algum progresso na forma como os alunos justificavam generalizações, visto que desde a questão 1 da ficha de trabalho A, não houve nenhuma questão que orientasse os alunos a generalizar e depois justificar essa generalização.

As justificações, relativamente ao nível de complexidade, basearam-se todas em propriedades ou procedimentos (nível 3C) e quanto à formalidade, houve um acréscimo de alunos a apresentar o tipo C.

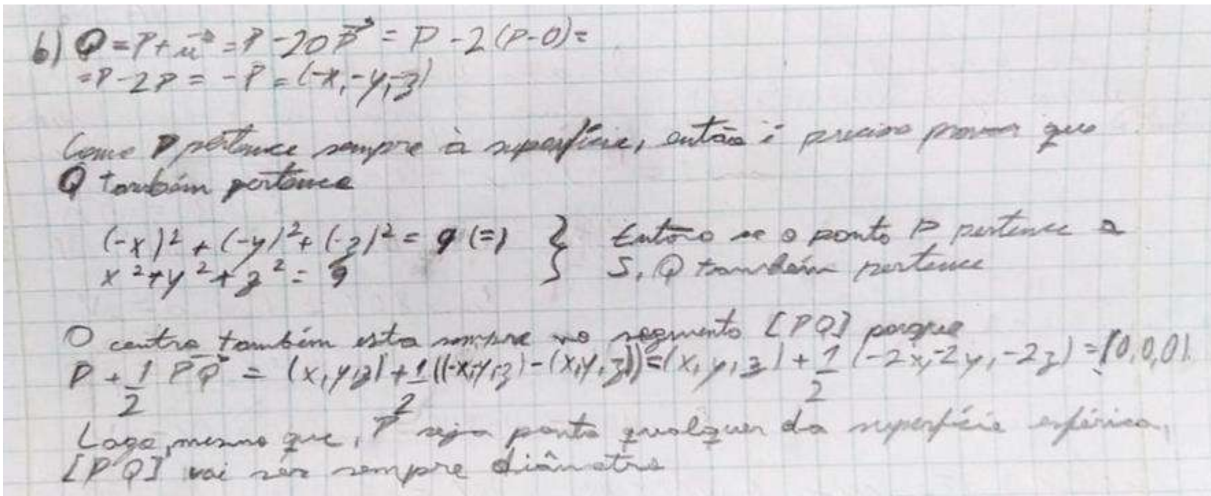
Tabela 22: Níveis de complexidade das justificações na Questão 1b) – Ficha de trabalho D (Parte II)

Questão 1b) (Ficha de trabalho D – Parte II)	**Níveis de complexidade**						Não resolveu
	0	**1**	**2**	**3A**	**3B**	**3C**	
Nº de alunos						21	5
Percentagem						100%	-

Tabela 23: Tipos de formalidade das justificações na Questão 1b) – Ficha de trabalho D (Parte II)

Questão 1b) (Ficha de trabalho D – Parte II)	**Tipos de formalidade**			Não atribuível	Não resolveu
	A	**B**	**C**		
Nº de alunos		3	18		5
Percentagem		14,3 %	85,7%		-

Dos alunos que apresentaram uma justificação de tipo de formalidade C, apresento a resolução da Jéssica como exemplo (Figura 55).



b) $Q = P + \vec{u} = P - 2\vec{OP} = P - 2(P-O) =$
$= P - 2P = -P = (-x, -y, -z)$

Como P pertence sempre à superfície, então é preciso provar que Q também pertence

$(-x)^2 + (-y)^2 + (-z)^2 = 9 \;(=)\; x^2+y^2+z^2 = 9$ } Então se o ponto P pertence a S, Q também pertence

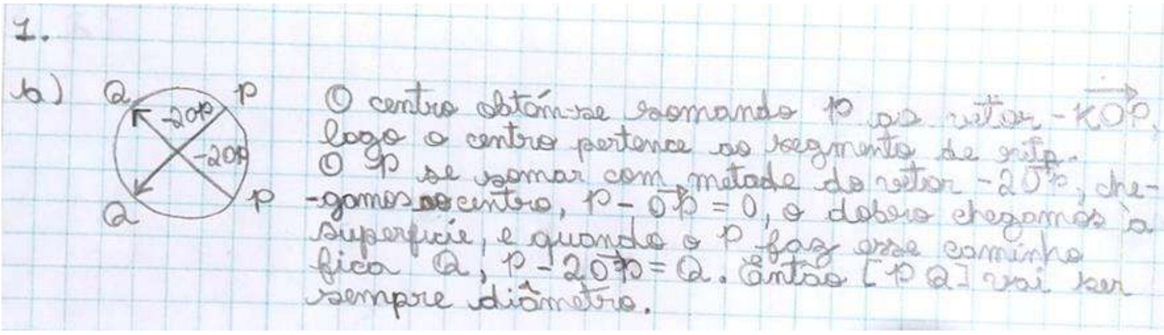
O centro também esta sempre no segmento [PQ] porque
$P + \frac{1}{2}\vec{PQ} = (x,y,z) + \frac{1}{2}((-x,-y,-z)-(x,y,z)) = (x,y,z) + \frac{1}{2}(-2x,-2y,-2z) = (0,0,0)$

Logo, mesmo que P seja ponto qualquer da superfície esférica, [PQ] vai ser sempre diâmetro

Figura 55: Resolução da Jéssica na Questão 1b) da Ficha de trabalho D – Parte II

A Jéssica, como se pode verificar, recorre a propriedades e procedimentos do cálculo vetorial e da equação reduzida da superfície esférica para justificar a generalização obtida, por isso atribuí o nível de complexidade 3C. Na formalidade, apesar da aluna ter generalizado de imediato, sem primeiro ter testado a sua conjetura com alguns exemplos, conseguiu apresentar um conjunto de inferências bem conectadas, explicitando os elementos da situação que permitiram chegar à conclusão obtida, o que sustenta o tipo de formalidade atribuída.

Em comparação, o Manuel (Figura 56) também apresenta uma justificação de igual nível de complexidade, mas com o tipo B de formalidade.



1.
b) O centro obtém-se somando P ao vetor $-k\vec{OP}$, logo o centro pertence ao segmento de reta. O P se somar com metade do vetor $-2\vec{OP}$, chegamos ao centro, $P - \vec{OP} = 0$, o dobro chegamos à superfície, e quando o P faz esse caminho fica Q, $P - 2\vec{OP} = Q$. Então [PQ] vai ser sempre diâmetro.

Figura 56: Resolução do Manuel na Questão 1b) da Ficha de trabalho D – Parte II

O Manuel, embora apresente uma estratégia alternativa à da Jéssica, e que também assenta em propriedades e procedimentos, deixa demasiadas informações implícitas e com uma linguagem pouco adequada. Na primeira frase, quando o aluno justifica que o centro, o ponto de coordenadas (0,0,0), vai pertencer ao segmento de reta $[PQ]$ porque este ponto obtém-se somando o ponto P com o vetor $-k\overrightarrow{OP}$, deveria ter sido esclarecido que isto só acontece devido às propriedades da equação vetorial. No segundo argumento, é nítido, quando se conjuga a sua ilustração com o que foi escrito em linguagem natural, que a estratégia do aluno seria justificar que como $O = P - \overrightarrow{OP}$ e $Q = P - 2\overrightarrow{OP}$ significa que a distância do ponto P ao ponto Q é o dobro da distância do ponto P ao centro O, e como já tinha sido provado que $O \in [PQ]$, então $[PQ]$ será sempre diâmetro nos contornos apresentados. No entanto, não foi desta forma que o aluno justificou, tendo evidenciado algumas dificuldades de articulação de discurso matemático, ao utilizar expressões como o "P faz esse caminho fica Q". Assim, torna-se cada vez mais evidente, que este surgimento de expressões do cotidiano durante as justificações, raramente surgem de alunos que não tenham interpretado bem a questão, ou que revelem muitas dificuldades nas propriedades, procedimentos e conceitos envolvidos, na verdade são alunos que sabem utilizar uma variedade de representações, e que utilizam isso como auxílio, quando sabem que a linguagem empregue por si só, não foi adequada ou foi pouco esclarecedora.

5.5.3. Questão 2

2. Seja *R* uma superfície esférica qualquer e *W* um ponto de *R*, num referencial $o.n.Oxyz$. Em que condições podemos afirmar que $T = W - 2\overrightarrow{OW}$ pertence à superfície esférica? Justifica a tua resposta.

Figura 57: Questão 2 da Ficha de trabalho D – Parte II

A partir da tabela 24, observa-se que houve alguns alunos a apresentarem justificações baseadas em evidência empírica, porém em percentagem menor, quando comparadas com as justificações com base em propriedades ou procedimentos.

Tabela 24: Níveis de complexidade das justificações na Questão 2 – Ficha de trabalho D (Parte II)

Questão 2 (Ficha de trabalho D – Parte II)	**Níveis de complexidade**						Não resolveu
	0	**1**	**2**	**3A**	**3B**	**3C**	
Nº de alunos			4			17	5
Percentagem			19%			81%	-

No que se refere à formalidade, dos alunos que apresentaram uma justificação, apenas três apresentaram uma justificação formal incompleta, e os restantes, completa.

Tabela 25: Tipos de formalidade das justificações na Questão 2 – Ficha de trabalho D (Parte II)

Questão 2 (Ficha de trabalho D – Parte II)	**Tipos de formalidade**			Não atribuível	Não resolveu
	A	**B**	**C**		
Nº de alunos		3	18		5
Percentagem		14,3%	85,7%		-

Em seguida, exemplificarei com duas resoluções escritas as situações ocorridas. Começo com a resolução do Mateus que realizou uma justificação com o nível de complexidade 3C e tipo de formalidade B (Figura 58).

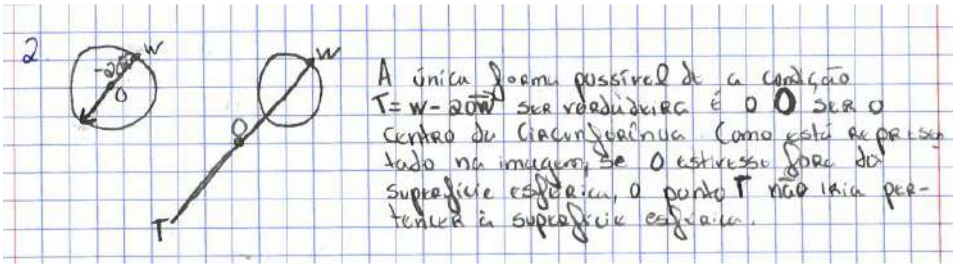


Figura 58: Resolução do Mateus na Questão 2 da Ficha de trabalho D – Parte II

O Mateus validou a sua generalização apenas com base em dois desenhos, um que representa a condição que considera verdadeira e a hipótese contrária. A sua justificação trata-se de uma particularização, pois ele tenta validar a sua conclusão usando casos particulares, o que fundamenta o nível de complexidade atribuído. Na formalidade, quando o aluno diz "a condição $T = W - 2\overrightarrow{OW}$ ser verdadeira", $T = W - 2\overrightarrow{OW}$ não é a condição, o que se pede na questão é em que condições o ponto T pertence à superfície esférica. Em seguida, quando afirma: "se O estivesse fora da superfície esférica", o que deveria ter escrito era "se o centro da superfície esférica não fosse o ponto de coordenadas (0,0,0)", pois mesmo considerando que foi isso que o aluno raciocinou, ao dizer "fora", não está a incluir o caso em que o ponto (0,0,0) está dentro da esfera, mas não é centro. Portanto, ainda que a justificação do aluno esteja percetível, há momentos em que a conexão de inferências é feita de modo implícito, por isso atribuí o tipo de formalidade B.

Com o mesmo nível de complexidade, mas com o tipo de formalidade C, apresento a resolução da Marina (Figura 59).

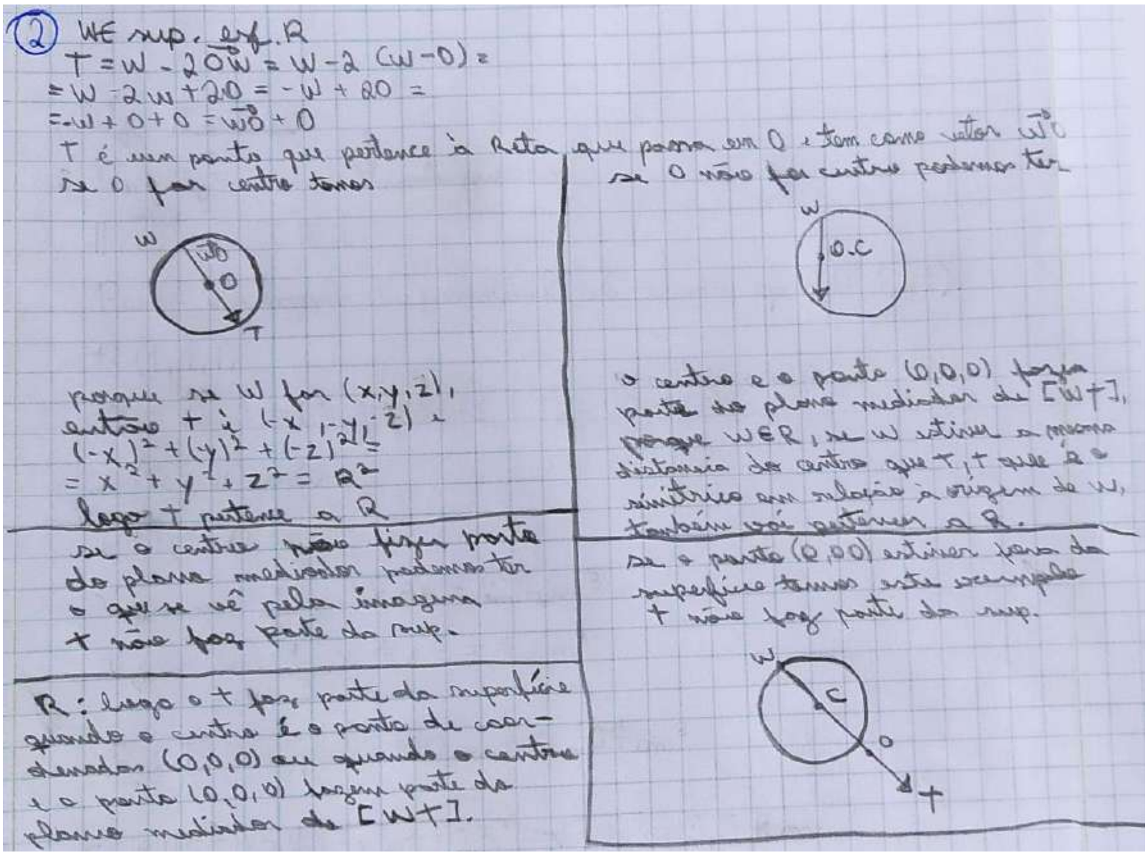


Figura 59: Resolução da Marina na Questão 2 da Ficha de trabalho D – Parte II

A Marina é uma aluna que durante as aulas, sempre teve facilidade em fazer conexões entre representações, mas nas suas justificações revelava certa dificuldade em se cingir à linguagem matemática adequada, ao utilizar habitualmente expressões do cotidiano. No entanto, nesta resolução já conseguiu evidenciar um discurso matemático rigoroso, explicitando as propriedades e os procedimentos utilizados (nível 3C), para justificar em que condições o ponto T pertence à superfície esférica R. Na formalidade, a atenção dedicada à análise individual de cada uma das hipóteses, a apresentação de um conjunto de inferências cuidadosamente organizadas e a criação de representações visuais para cada cenário, combinados com o uso de uma linguagem matemática adequada, possibilitaram a classificação desta justificação como sendo do tipo C, em termos de formalidade. O único reparo que faço a esta resolução, é que na resposta, bastava a aluna ter escrito a condição "quando o centro e o ponto de coordenadas (0,0,0) fazem parte do plano mediador", porque esta condição já inclui a hipótese do centro da superfície esférica e o ponto de coordenadas (0,0,0) serem o mesmo ponto.

5.5.4. Ações do Professor e Dificuldades dos alunos

Nesta parte II da ficha de trabalho D, considero que embora se tenham verificado algumas dificuldades já observadas em fichas anteriores, como a ingenuidade em validar generalizações recorrendo a casos particulares (nível de complexidade 2) e a escrita de inferências baseadas apenas implicitamente em elementos da situação (tipo de formalidade B), o facto de constantemente incentivar os alunos nas aulas a apresentarem justificações completas, e de solicitar aos alunos que refiram aos seus colegas o que torna a sua justificação válida, conduziu a que muitos alunos nesta parte II tenham começado a serem o mais esclarecedores possível, visto que em todas as questões a percentagem de alunos com uma justificação formal completa foi superior às restantes.

Na introdução desta ficha os alunos estavam atentos, e no trabalho autónomo apenas houve espaço para questões de confirmação e ações de informação, devido ao pouco tempo disponível. O momento de discussão, pelas razões anteriormente mencionadas, não acorreu.

5.6. Ficha de trabalho E

A ficha de trabalho E trata-se de um problema onde os alunos teriam de aplicar os seus conhecimentos sobre propriedades da equação vetorial de uma reta, da superfície esférica/esfera e do plano mediador. Para a análise foram selecionadas as questões onde foi expressamente solicitado que os alunos justificassem a sua resposta, portanto, a questão 1.1 e a questão 1.2, alínea b).

5.6.1. Questão 1.1

1.1) O navio recebeu uma informação, por rádio, sobre um cachalote prestes a mover-se localizado no ponto $A(2,11,-2)$. Admite que o cachalote vai seguir uma trajetória retilínea, passando pelo ponto $B(2,9,-1)$.

Investiga se, na sua trajetória, a cachalote irá ser detetado pelo radar do navio. Justifica a tua resposta.

Figura 60: Questão 1.1 da Ficha de trabalho E

Na questão 1.1 (Figura 60), é pretendido que os alunos intersetem a semirreta que define a trajetória retilínea do cachalote com a superfície esférica que define o limite do radar. Após obterem as coordenadas do ponto de interseção, os alunos deverão interpretar, com base no contexto do problema, se será possível que o cachalote se encontre no ponto calculado.

Tabela 26: Níveis de complexidade das justificações na Questão 1.1 – Ficha de trabalho E

Questão 1.1 (Ficha de trabalho E)	**Níveis de complexidade**						Não resolveu
	0	**1**	**2**	**3A**	**3B**	**3C**	
Nº de alunos		2				21	3
Percentagem		8,7%				91,3%	-

Tabela 27: Tipos de formalidade das justificações na Questão 1.1 – Ficha de trabalho E

Questão 1.1 (Ficha de trabalho E)	**Tipos de formalidade**			Não atribuível	Não resolveu
	A	**B**	**C**		
Nº de alunos		7	16		3
Percentagem		30,4%	69,6%		-

Como se pode observar pelas tabelas, em termos de nível de complexidade, as justificações dos alunos distribuíram-se entre o nível 1 e o nível 3C. Quanto à formalidade, entre os tipos B e C.

No nível 1 de complexidade, destaco a seguinte resolução (Figura 61):

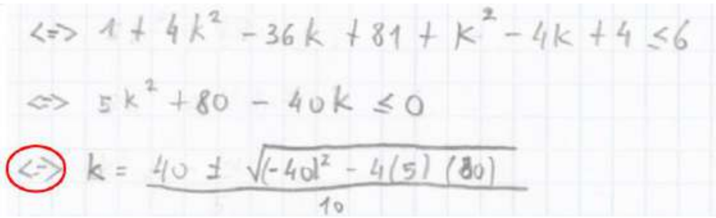
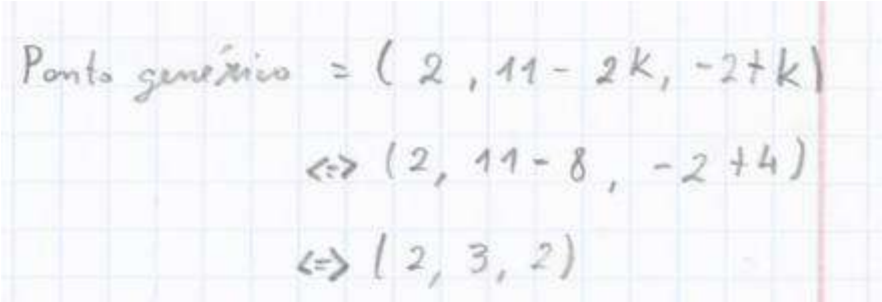


Figura 61: Parte da resolução do Manuel na Questão 1.1 da Ficha de trabalho E

Na resolução do Manuel é possível observar que ele sugere que a inequação $5k^2 + 80 - 40k \leq 0$ é equivalente à equação $k = \frac{40 \pm \sqrt{(-40)^2 - 4(5)(80)}}{10}$, quando o correto seria não ter escrito símbolo algum quando introduziu a fórmula, visto que calcular as raízes de uma função não é equivalente a determinar o intervalo de valores para os quais a função é menor ou igual a 0. Este uso inapropriado de símbolos matemáticos é referido por Sowder e Harel (1998) e Mata-Pereira (2018), como consequência da preocupação do aluno seguir uma determinada estrutura procedimental para chegar à resposta correta, sem na verdade compreender o significado dos símbolos ou procedimentos que está a utilizar, por isso atribuí o nível 1 de complexidade.

Este aluno, no fim da sua resolução, também escreveu o seguinte:



Ponto genérico $= (2, 11 - 2k, -2+k)$

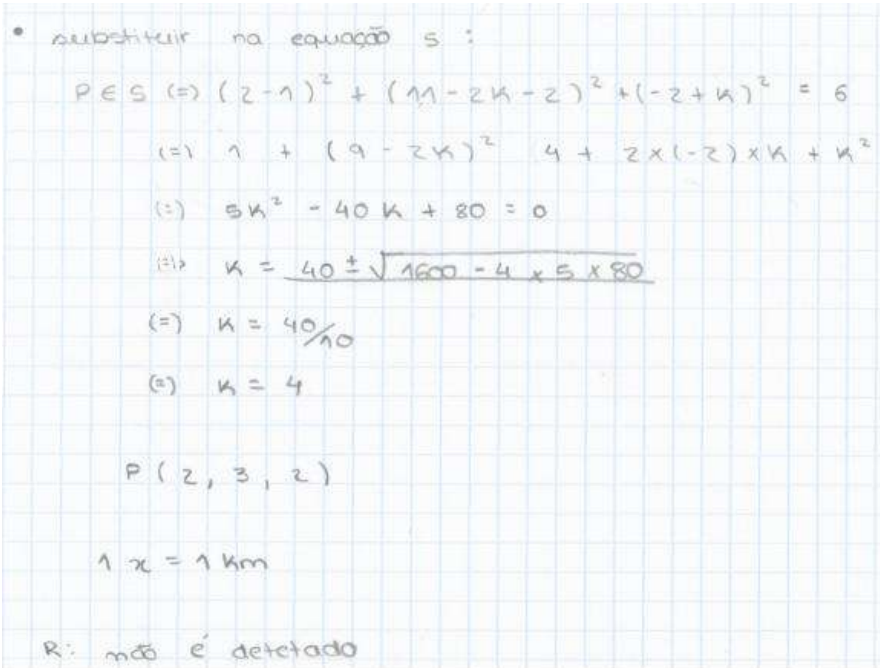
$\Leftrightarrow (2, 11-8, -2+4)$

$\Leftrightarrow (2, 3, 2)$

Figura 62: Segunda parte da resolução do Manuel na Questão 1.1 da Ficha de trabalho E

Portanto, verifica-se novamente uma utilização incorreta da simbologia matemática, e não refere em concreto que o ponto de coordenadas (2,3,2) é o ponto de interseção entre a semirreta e a superfície esférica, e nesse sentido, considero incompleto (tipo B de formalidade).

De maneira semelhante, também houve alunos que apresentaram uma justificação de nível de complexidade 3C, por terem recorrido a propriedades e procedimentos da equação vetorial de uma reta e da superfície esférica, mas no fim não indicaram que o ponto que calcularam é o ponto de interseção, como se pode observar na resolução seguinte (Figura 63).



• substituir na equação S :

$P \in S \Leftrightarrow (2-1)^2 + (11-2k-2)^2 + (-2+k)^2 = 6$

$\Leftrightarrow 1 + (9-2k)^2 \quad 4 + 2 \times (-2) \times k + k^2$

$\Leftrightarrow 5k^2 - 40k + 80 = 0$

$\Leftrightarrow k = \underline{40 \pm \sqrt{1600 - 4 \times 5 \times 80}}$

$\Leftrightarrow k = 40/10$

$\Leftrightarrow k = 4$

$P(2, 3, 2)$

$1x = 1$ km

R: não é detetado

Figura 63: Parte da resolução da Carlota na Questão 1.1 da Ficha de trabalho E

Adicionalmente, esta aluna escreve como resposta final: “não é detetado”, mas não explica a razão de concluir isso. Devido a essas duas razões, apesar da aluna ter realizado quase todo o procedimento, de forma bastante formal, e explicitado o significado de cada etapa, atribuí à sua justificação o tipo B.

Quanto aos alunos que apresentaram uma justificação de tipo C de formalidade, todos aplicaram um procedimento análogo ao utilizado pela Carlota, mas explicitaram o que significava o ponto P, como forma de justificar a sua conclusão.

Exemplifico o sucedido, com duas resoluções com conclusões distintas (Figuras 64 e 65):

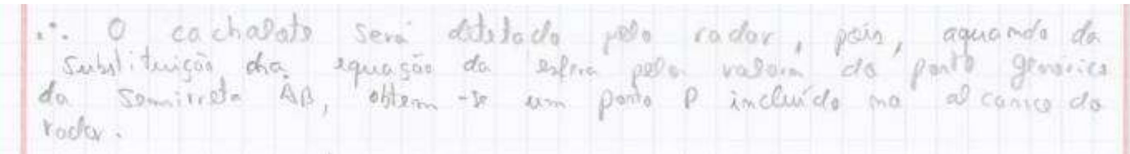

∴ O cachalote será detetado pelo radar, pois, aquando da substituição da equação da esfera pelos valores do ponto genérico da semirreta $\dot{A}B$, obtem-se um ponto P incluído no alcance do radar.

Figura 64: Parte da resolução do Rui na Questão 1.1 da Ficha de trabalho E

O Rui conclui que como a trajetória retilínea do cachalote interseta o radar no ponto P, o cachalote será então detetado. Esta conclusão foi a mais comum, visto que a maioria dos alunos não teve o cuidado de interpretar o valor da cota do ponto de interseção. No entanto, houve alunos que procederam a essa análise, como a Bruna:

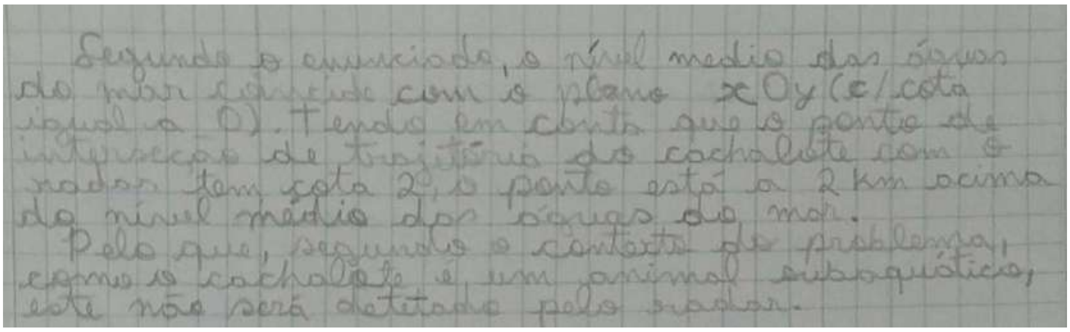

Segundo o enunciado, o nível medio das águas do mar coincide com o plano xOy (c/ cota igual a 0). Tendo em conta que o ponto de intersecção da trajetória do cachalote com o radar tem cota 2, o ponto está a 2 km acima do nível médio das águas do mar.
Pelo que, segundo o contexto do problema, como o cachalote é um animal subaquático, este não será detetado pelo radar.

Figura 65: Parte da resolução da Bruna na Questão 1.1 da Ficha de trabalho E

A Bruna, ao contrário do Rui, verificou que apesar de a trajetória retilínea do cachalote coincidir com o alcance do radar, o ponto de interseção encontrava-se a dois $2km$ acima do nível médio das águas do mar. Assim, mesmo supondo que o cachalote pudesse ter realizado um salto, este nunca teria $2km$ de altura, portanto, durante a trajetória enunciada, o cachalote "não será detetado pelo radar".

A discussão coletiva desta questão abordou três tópicos. O primeiro diz respeito ao uso inapropriado de símbolos matemáticos, no qual tentei que os alunos explicassem o significado dos símbolos utilizados, e depois criei duas equações, onde os alunos teriam que dizer-me qual o símbolo a usar. O segundo prende-se às justificações incompletas, tendo sido solicitado aos alunos que justificassem a sua conclusão, e salientassem as diferenças entre a sua justificação e uma justificação completa. O terceiro concerne à parte da resolução do Rui, onde foi pedido a todos os alunos que obtiverem uma conclusão semelhante, que interpretassem as coordenadas do ponto P, e que explicassem o seu significado no âmbito do problema.

O terceiro momento foi o que gerou uma maior discussão, tendo havido alunos que quando constataram que a cota do ponto de interseção correspondia a $2km$, começaram a fazer diversões questões:

Aluno1: Não seria possível o cachalote ter sido detetado antes, perto do nível médio da água do mar?

Professor: Por exemplo, o ponto (2,3,0)?

Aluno1: Sim, ou abaixo disso.

Professor: Quando aplicas o procedimento para determinar os pontos de interseção, podes obter quantos pontos?

Aluno1: 1 ou 2, se for dois quer dizer que atravessa a esfera…ãh…também pode ser 0, que não interseta.

Professor: Neste caso, só obtiveste um ponto, o que isso quer dizer?

Aluno1: Ãh…só interseta uma vez.

Aluno 2: Então, mas se fosse dois pontos já podia…o cachalote podia começar a ser detetado em qualquer ponto dentro da esfera.

Aluno 1: Pois…ai já não se sabia…

Professor: Se determinassem dois pontos de interseção, todos os pontos da reta que estivessem no intervalo desses dois pontos, também estariam aonde?

Aluno 1: Dentro da esfera.

Professor: Então, se os pontos de interseção, fossem por exemplo (2,3,2) e (2,3,-1), para o cachalote só começar a ser detetado dentro do alcance do radar, teria que acontecer o quê?

Aluno 2: Esqueça…pois…o primeiro ponto seria o (2,3,-1).

E também houve alunos a questionar-me acerca do quão profundo um cachalote consegue mergulhar e saltar, que foram perguntas que considerei também interessantes, porque pesquisei sobre o assunto para elaborar a ficha de trabalho, então pude saciar a sua curiosidade, e deixou-me a pensar se poderia ter feito uma ficha em colaboração com a professora de Biologia.

5.6.2. Questão 1.2. – alínea b)

b) Verifica se existe perigo de o torpedo poder atingir uma embarcação que se encontra encalhada no ponto $E(1,4,0)$. Fundamenta a tua resposta.

Figura 66: Questão 1.2b da Ficha de trabalho E

Na alínea b) da questão 1.2, apenas era necessário que os alunos justificassem que o ponto de coordenadas (1,4,0) não pertencia à semirreta que definia a trajetória do torpedo, e como tal, não havia perigo de a embarcação ser atingida.

Tabela 28: Níveis de complexidade das justificações na Questão 1.2.b) – Ficha de trabalho E

Questão 1.2.b) (Ficha de trabalho E)	Níveis de complexidade						Não resolveu
	0	**1**	**2**	**3A**	**3B**	**3C**	
Nº de alunos		1				25	
Percentagem		3,8%				96,2%	

Tabela 29: Tipos de formalidade das justificações na Questão1.2.b) – Ficha de trabalho E

Questão 1.2.b) (Ficha de trabalho E)	Tipos de formalidade			Não atribuível	Não resolveu
	A	**B**	**C**		
Nº de alunos		5	21		
Percentagem		19,3%	80,7%		

Como as tabelas indicam, todos os alunos conseguiram resolver a questão e justificar a sua resposta com base em propriedades e procedimentos. Quanto à formalidade, a maioria dos alunos apresentou uma justificação formalmente completa, mas continuou a haver alguns alunos que não explicitaram os elementos da situação empregues na sua resolução.

Com o nível de complexidade 3C e tipo de formalidade B, apresento como exemplo a Resolução da Clara (Figura 67):

$$SE = \|\overrightarrow{SE}\| = \sqrt{2^2+2^2+2^2} = \sqrt{12} \approx 3{,}5 \text{ km}$$

$$3{,}5 \text{ km} < 4 \text{ km}$$

Figura 67: Resolução da Clara na Questão 1.2b da Ficha de trabalho E

A Clara calculou a norma do vetor $\overrightarrow{SE}$ e salientou que 3,5km é inferior 4km. A resposta desta aluna é um pouco ambígua, mas deduzo que a aluna queria concluir que como distância da embarcação ao torpedo é inferior a 4000m, então a embarcação pode ser atingida. Portanto, apesar de poder-se deduzir qual foi o raciocínio, era preciso acrescentar essa informação para ter uma justificação completa, e por isso lhe atribui o tipo de B de formalidade. No entanto, calcular a norma do vetor $\overrightarrow{SE}$ apenas era necessário, caso a embarcação estivesse na trajetória do torpedo, algo que a maior parte dos alunos compreendeu, como se pode verificar na resolução do Vítor (Figura 68).

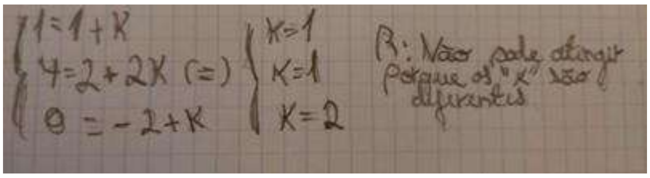


Figura 68: Resolução do Vítor na Questão 1.2b da Ficha de trabalho E

O Vítor, embora tenha se enganado na primeira equação, em que o k teria de ser igual a 2, a sua conclusão não é desmentida, porque as outras duas equações estão certas e dão valores de k distintos, e basta haver dois valores contraditórios para k, para podermos assumir que o ponto em causa não pertence à reta. Porém, a sua resposta não foi escrita com uma linguagem adequada, não refere que utilizou um vetor colinear ao escrito no enunciado, por isso atribuí também o tipo de formalidade B.

Por comparação, o Álvaro (Figura 69) utilizou uma abordagem semelhante, mas com o tipo de formalidade C.

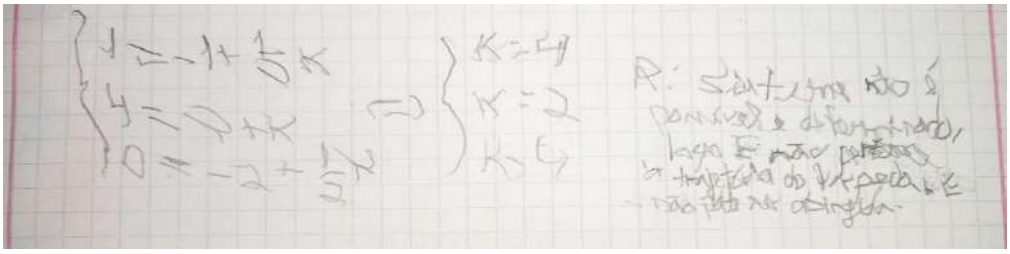


Figura 69: Resolução do Álvaro na Questão 1.2b da Ficha de trabalho E

Como se pode verificar, o Álvaro, já explicita na sua resposta que o sistema de equações paramétricas, lhe permitiu concluir que a embarcação não pertencia à trajetória retilínea definida pelo torpedo, e assim, não havia perigo de ser atingida.

Nesta questão, apesar de ter havido dois alunos que calcularam a norma de $\overrightarrow{SE}$ antes de determinar se a embarcação estava na trajetória do torpedo, o resto da turma compreendeu qual era o procedimento a adotar para responder à questão, o que revela que não houve dificuldades de interpretação. Quanto às justificações, foram poucos os casos em que os alunos não utilizaram uma linguagem matemática adequada ou que não explicitaram o seu raciocínio, por isso considero que os alunos estão a conseguir desenvolver as justificações.

A discussão coletiva acerca desta questão foi realizada na parte I da ficha seguinte.

5.6.3. Ações do Professor e Dificuldades dos alunos

Na questão 1.1 surgiu, pela primeira vez, justificações de nível de complexidade 1, devido à utilização incorreta da simbologia matemática. Considero que não tenha acontecido antes, porque as questões anteriores não envolviam as aplicações de procedimentos tão extensivos. Assim, achei necessário alertar na discussão coletiva os erros identificados e **informar** os alunos sobre o significado dos símbolos matemáticos. Quanto à formalidade, a presença de algumas justificações de tipo B, deve-se a razões similares ao que aconteceu na ficha B, os alunos fazerem inferências baseadas em elementos implícitos. No entanto, a maioria dos alunos apresentou justificações formalmente completas.

Na questão 1.2, os alunos apresentaram algumas justificações formalmente incompletas, sobretudo, porque não fazem a referência explicita aos elementos da situação utilizados.

Na introdução da ficha, apesar de ter sido um pouco mais longa que as anteriores, os alunos estavam atentos e interessados em perceber o enunciado do problema. Durante a realização da ficha, considero que consegui insistir mais com os grupos a esclarecerem os procedimentos adotados, através de questões de inquirição. O que mais saliento da discussão sobre a questão 1.1, foi o interesse evidenciado pelos alunos, a formularem questões que iam além da ficha. Considero que isto se deva aos contornos reais do problema, que não tinham sido levados em consideração por alguns alunos durante a resolução, mas que depois de perceberam o significado das coordenadas do ponto de interseção, começaram a colocar dúvidas sobre diversas situações que poderiam acontecer na interseção entre uma reta e uma superfície esférica/esfera. Esta situação, gerada na sequência das ações de **convidar** e **guiar**, acredito que tenha ajudado esses alunos a clarificar alguns pensamentos intuitivos, e a refletir sobre os procedimentos adotados.

5.7. Ficha de trabalho F – Parte I

A ficha de trabalho F, tanto a parte I como a parte II, foram realizadas individualmente pelos alunos. A ficha de trabalho F – Parte I só tinha uma questão, em que era solicitado aos alunos para classificar três resoluções da questão 1.2, alínea b) da ficha de trabalho E (Figura 70).

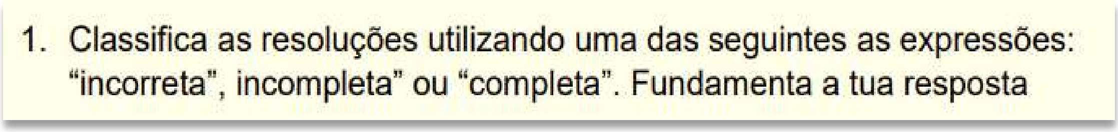


Figura 70: Questão 1 da Ficha de trabalho F – Parte I

Uma das resoluções era de um aluno, que foi analisada aquando da ficha anterior, as outras duas resoluções são adaptações das restantes que também foram analisadas.

Nenhuma das resoluções era completa, tal como foi indicado no capítulo 3.

5.7.1. Resolução A

Quanto à resolução A, dezasseis alunos consideraram-na incorreta, nove incompleta e um completa.

O único aluno que categorizou a resolução A como completa apresentou o seguinte argumento:

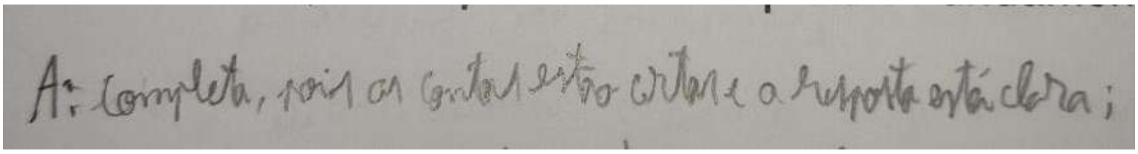


Figura 71: Resolução do Paulo na Questão 1 da Ficha de trabalho F – Parte I

Portanto, para este aluno, uma resolução que tenha as contas certas e uma resposta clara está completa. A respeito das contas certas, é nítido, que não houve distinção entre o que é estar certo e o que é estar completo, assim decidi questionar este aluno:

Professor: Porque as contas estarem certas significa estar completo?

Paulo: Então… se as contas não estiverem certas… não tem como a resolução estar completa.

Professor: Imagina que peço para resolveres a equação…$x^2 - 2x + 1 = O$, e tu te enganaste com um sinal, e aquilo deu $x = -1$, sendo que devia dar $x = 1$, as contas estão certas?

Paulo: Não, então ele se enganou.

Professor: E completo?

Paulo: Ãh... tá bem…acho que já percebi…as contas podem estar erradas, mas se escrever tudo fica completo.

Neste momento, o meu objetivo foi guiar o aluno a interrogar-se sobre a coerência da sua fundamentação. Isto ocorreu porque, em algumas situações, os alunos apresentaram justificativas inválidas não por falta de conhecimento dos conteúdos, mas porque não conseguiam identificar quais eram as informações essenciais a serem explicitadas e não tinham sensibilidade para compreender o sentido que estavam a atribuir às suas justificações.

Quanto à afirmação de que "a resposta está clara", o aluno prontamente percebeu que a clareza não é sinônimo de completude. No entanto, ele destacou no seu diálogo algo que considero relevante mencionar:

Paulo: Mas professor, estar claro é importante, o professor que fala das justificações… que você e também os meus colegas têm que entender o que fiz.

Portanto, o aluno compreendeu uma noção fundamental, e que espero que todos os alunos também tenham compreendido ao longo da minha intervenção letiva, que uma justificação tem que ser percetível tanto para o autor como terceiros. É essencial que o seu propósito seja claro e que o conhecimento utilizado seja explicitamente apresentado.

Não obstante, apesar de o aluno com um pouco de ajuda conseguir clarificar o seu raciocínio, a maneira como respondeu sugere que não interpretou apropriadamente a questão 1.2, alínea b), da ficha de trabalho E. Como resultado, optou por classificar esta resolução como completa, porque era a mais aprazível e adequada em termos de linguagem matemática, um ponto que também enfatizei nas minhas aulas.

A respeito dos alunos que classificaram a resolução A como incompleta, a sua fundamentação pode ser encontrada na figura 72.

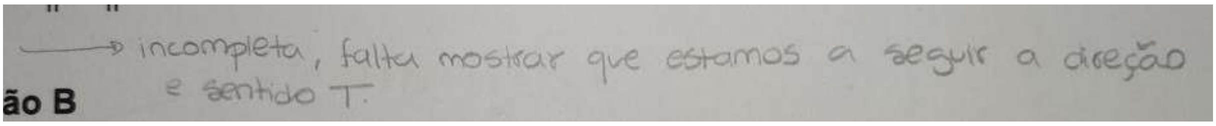


Figura 72: Resolução da Matilde na Questão 1 da Ficha de trabalho F – Parte I

Assim, na ótica de alguns alunos, a incompletude da resolução deve-se ao motivo de que na resolução foi negligenciada a trajetória do torpedo. Quando estes alunos foram convidados a partilhar o seu raciocínio, acrescentaram:

Matilde: Está incompleta, pois mesmo que o barco esteja a 3,5km do submarino, não é confirmado que o barco se encontre na trajetória do torpedo.

Deste modo, quem categorizou como incompleta, não o fez com base na crença de que a embarcação estava na trajetória do torpedo e que era necessário apenas justificar esse facto para tornar-se completa. O que deixou os alunos que classificaram a resolução como incorreta, intrigados, porque a justificação apresentada pela Matilde, foi semelhante à que foi utilizada por esses alunos, como se pode verificar na figura 73.

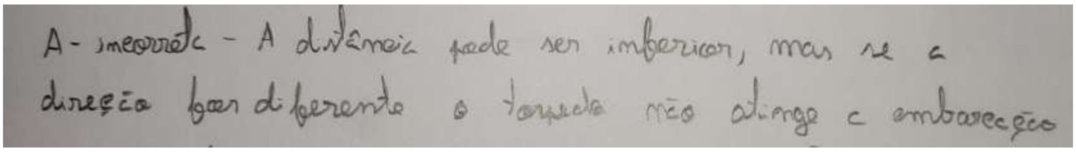


Figura 73: Resolução do Rui na Questão 1 da Ficha de trabalho F – Parte I

Este acontecimento provocou uma pequena discussão entre quem classificou a resolução como incompleta e incorreta.

Matilde: Eu percebi, mas olha, se ele tivesse calculado a trajetória e desse, então ele tinha que calcular a distância.

Rui: Mas não foi isso que aconteceu, por isso que está incorreta.

Bruna: A Matilde quer dizer que aquilo é uma das etapas, como só faltou uma, está incompleto.

Rui: Mas a ordem que importa, tu só vais pra segunda, se der certo na primeira, como ele foi logo pra segunda está mal, não respeitou a ordem...

Professor: Muito bem, alguém que não percebeu ou que discorde do Rui neste ponto?

A espontaneidade como esta discussão surgiu, com os próprios alunos a quererem saber como os seus colegas tinham dado uma justificação semelhante, mas uma resposta distinta, surpreendeu-me. Uma vez que tinha sido apenas a segunda vez que tinha realizado questões que solicitavam ou incentivavam a análise por parte do aluno de justificações apresentadas por outros, e os alunos já estavam adotando o hábito de partilhar ideias, de complementar o raciocínio dos seus colegas e de desconstruir.

5.7.2. Resolução B

Na resolução B, todos os alunos a consideraram incorreta, tendo sido a razão unânime para essa classificação o erro de cálculo na primeira equação. Porém, não querendo limitar a discussão apenas a esse ponto, decidi questionar o Tomé, que tinha criticado a justificação (Figura 74).

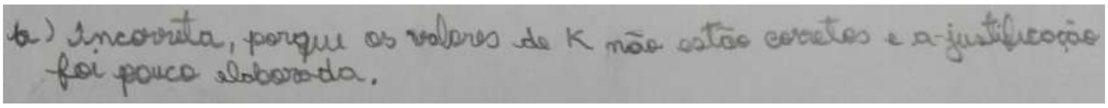

b) Incorreta, porque os valores de K não estão corretos e a justificação foi pouco elaborada.

Figura 74: Resolução do Tomé na Questão 1 da Ficha de trabalho F – Parte I

Nesta resolução, é referido que os cálculos não estão corretos, sendo explicitado que o erro se encontra nos valores de k, e que a "justificação foi pouco elaborada". Assim, solicitei que o aluno clarificasse esta última afirmação.

Tomé: Não está bem elaborada, porque ele diz "não pode atingir", mas atingir o quê? Não é dito.

Professor: Muito bem, mais alguma razão?

Tomé: Aquilo dos "k" serem diferentes não se deve dizer assim, fica melhor dizer que não obteve um único valor para "k".

O primeiro comentário revela que o aluno compreendeu que para estar completo, é necessário evitar que haja elementos implícitos. Quanto à segunda razão, deve-se ao facto de o aluno ter assimilado, durante a introdução do sistema de equações paramétricas, que quando se justifica que um ponto não pertence a uma dada reta, deve-se afirmar, por exemplo, que "não foi possível obter um único valor para k", ou que, "o sistema de equações não é possível e determinado", a fim de utilizar uma linguagem matemática adequada.

Portanto é evidente que o aluno entendeu que para uma justificação ser "bem elaborada", é preciso explicitar todos os elementos da situação e ter atenção ao rigor matemático. No entanto, apesar de já ter assimilado estas noções, no seu discurso oral, referiu dados que seriam indispensáveis para a completude da sua fundamentação escrita, visto que não clarificou o que entendia por "pouco elaborada". Assim, a tendência dos alunos de apresentarem justificações completas apenas quando são questionados a esclarecerem o seu raciocínio (Henriques, 2010), também acontece mesmo após os alunos já terem percebido o que é necessário para elaborar uma justificação desse tipo. Deste modo, é crucial que os alunos além de compreenderem o que torna uma justificação válida e completa, adquiram a rotina de elaborar essas justificações para superar a tendência mencionada.

Clarificado o que o aluno queria dizer por "justificação pouco elaborada", tentei desafiar os alunos a ver se encontravam algo na resolução que precisasse também ser justificado, e perguntei:

Professor: Então e se as contas estivessem certas, e com a justificação nos moldes que o Tomé falou, como ficaria?

Alunos: Aí ficaria completa.

Professor: Está tudo explicado, portanto?

(...)

Manuel: Os vetores, o vetor utilizado, na justificação, devia ter dito que o vetor utilizado é colinear ao vetor t, é o dobro do vetor t.

Professor: E utilizar um vetor colinear não é errado?

Manuel: Não, a reta é a mesma, até ajuda nas contas.

Assim, esta situação, é um exemplo de que as questões presentes na ficha, podem não ser suficientes para desenvolver o raciocínio matemático dos alunos, porque não foram incentivo suficiente para aprofundar certas ideias ou conceitos matemáticos. Nesses casos, formular novas questões para desafiar os alunos, a procurar detalhes, que estão presentes nas fichas, mas que os alunos não deram a devida importância, pode ser a melhor solução (Mata-Pereira, 2018). Até porque, como se pode verificar na seguinte resolução (Figura 75), houve uma aluna que também identificou a utilização de um vetor distinto, mas que não interpretou corretamente. Portanto, os momentos de discussão são uma mais-valia significativa, para se explorar todas as definições, propriedades e teoremas matemáticos presentes nas fichas de trabalho, e com isso levar os alunos a aprofundar o seu conhecimento.

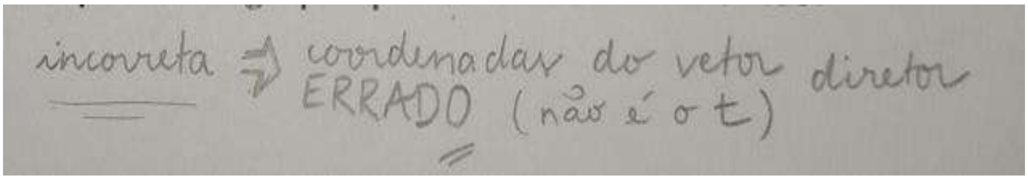


Figura 75: Resolução da Bruna na Questão 1 da Ficha de trabalho F – Parte I

5.7.3. Resolução C

Quanto à resolução C, todos os alunos também a consideraram como incorreta, mas devido à discussão realizada nas duas resoluções anteriores, os alunos prontamente salientaram os erros de cálculo no sistema, e que consideravam a justificação presente na “C”, ainda mais incompleta que a na “B”, porque o aluno apenas resolveu o sistema e não explicou de onde surgiu a conclusão de que *E* não pertencia.

5.7.4. Ações do Professor e Dificuldades dos alunos

A ficha de trabalho F – parte I considero que foi a que os alunos se envolveram mais na discussão. Isso pode ser atribuído, possivelmente, ao facto de esta ser a segunda vez que os

convido a comentar resoluções dos seus colegas, e como resultado, eles já demonstravam mais confiança de que contribuições incorretas também seriam valorizadas. A normalização desta prática, como fica em evidência nos excertos de discussão coletiva presentes, favorece o desenvolvimento do raciocínio matemático, pois os alunos, na busca por compreender o raciocínio dos seus colegas, confrontam os seus pontos de vista até chegarem a um consenso. Este consenso, contudo, não quer dizer que tenham chegado uma conclusão válida, por isso o professor deve estar atento aos argumentos para moderar o debate de ideias.

Além disso, embora tenha limitado a quantidade de questões devido a restrições de tempo, acredito que isso me permitiu formular mais perguntas durante o debate, o que, por sua vez, auxiliou os alunos a compreenderem melhor os conceitos matemáticos envolvidos.

5.8. Ficha de trabalho F - Parte II

Na Parte II, como o meu principal objetivo era verificar como estariam as justificações dos alunos, em comparação com a primeira questão da ficha de trabalho E, agora que resolveram individualmente, selecionei para análise a questão 1.1 (Figura 76).

5.8.1. Questão 1.1.

> Indica, justificando, o valor lógico da seguinte afirmação: A equação vetorial $(x, y, z) = (2,4,-1) + \lambda(-1,-2,1), \lambda \in [0, \quad 1[$ representa o maior percurso percorrido pelo cachalote ao longo da sua trajetória retilínea desde que começa a ser detetado pelo radar do navio.

Figura 76: Questão 1.1 da Ficha de trabalho F – Parte II

Todos os alunos que conseguiram resolver a questão justificaram com base em propriedades ou procedimentos, correspondente ao nível 3C de complexidade. No que concerne à formalidade, o tipo C foi atribuído a dezoito justificações, e os restantes quatro alunos realizaram justificações formais, mas incompletas (tipo B).

Tabela 30: Níveis de complexidade das justificações na Questão 1.1 da Ficha de trabalho F - Parte II

Questão 1.1. (Ficha de trabalho F – Parte II)	**Níveis de complexidade**						Não resolveu
	0	**1**	**2**	**3A**	**3B**	**3C**	
Nº de alunos						22	4
Percentagem						100%	-

Tabela 31: Tipos de formalidade das justificações na Questão 1.1 da Ficha de trabalho F - Parte II

Questão 1.1 (Ficha de trabalho F – Parte II)	**Tipos de formalidade**			Não atribuível	Não resolveu
	A	**B**	**C**		
Nº de alunos		4	18		4
Percentagem		18,2%	81,8%		-

Como todos os alunos compuseram justificações de nível 3C, vou exemplificar os tipos distintos de formalidade com duas resoluções: a primeira com o tipo C e a segunda com o tipo B (Figuras 77 e 78).

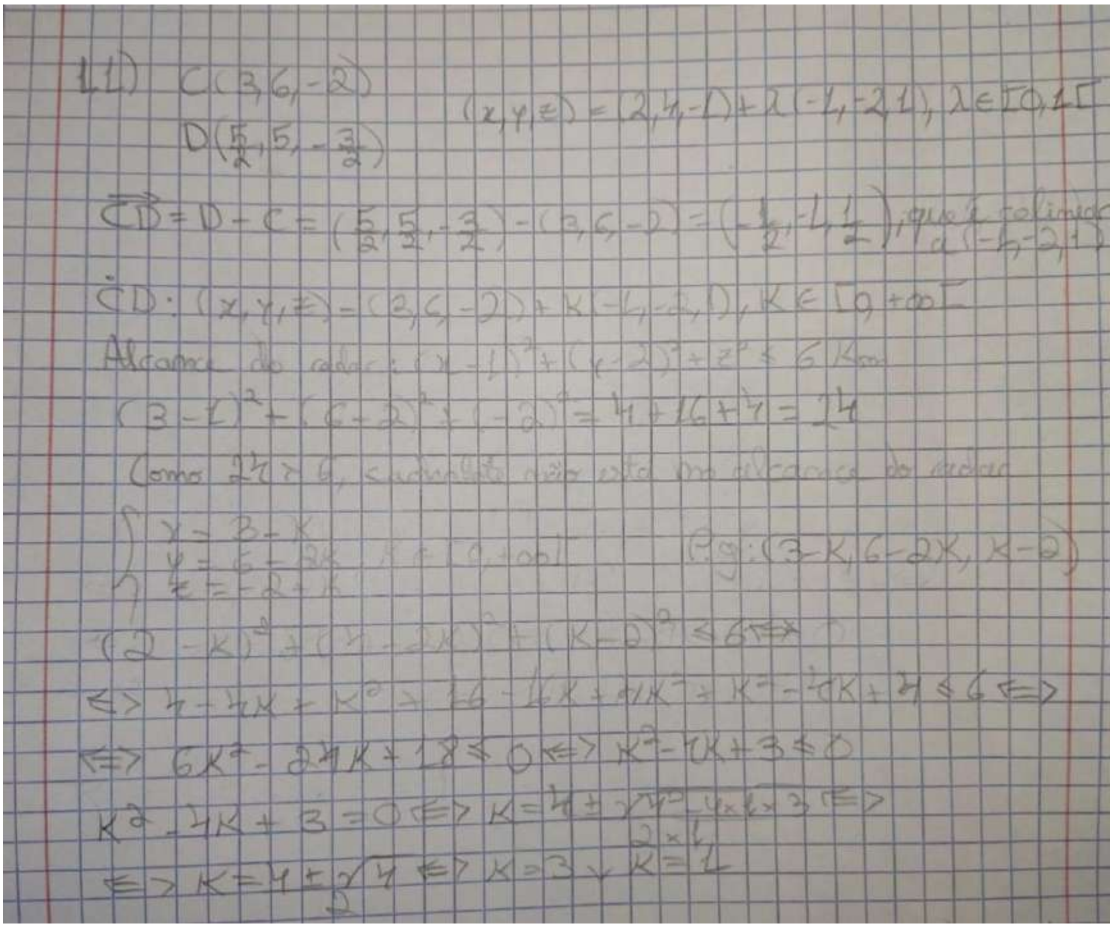


Figura 77: Primeira parte da resolução do Nuno na Questão 1.1 da Ficha de trabalho F – Parte II

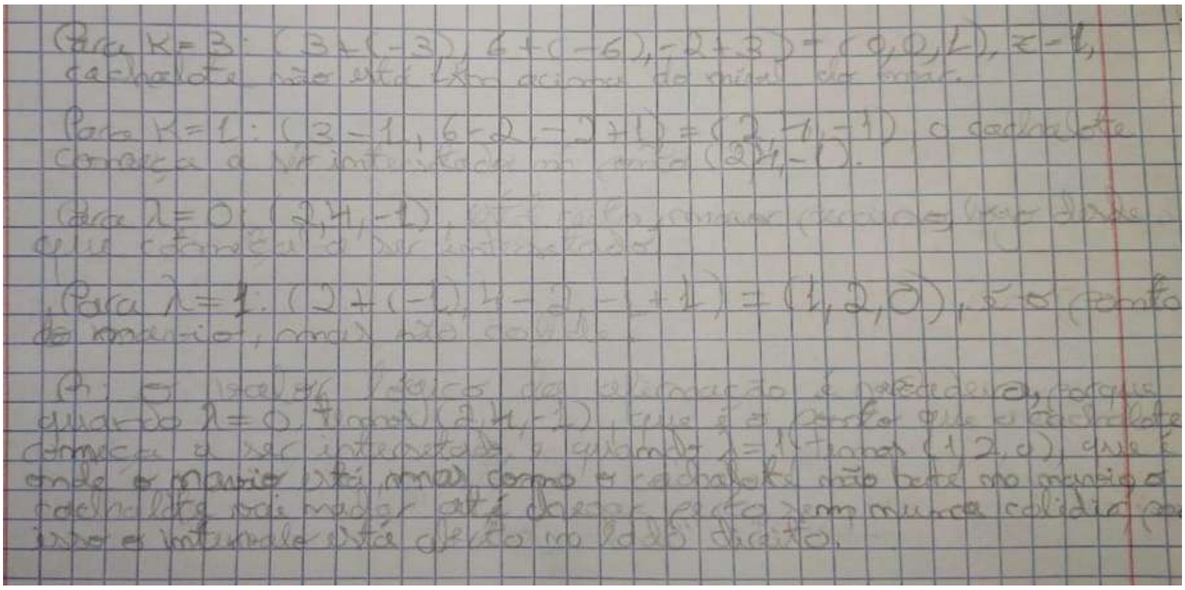
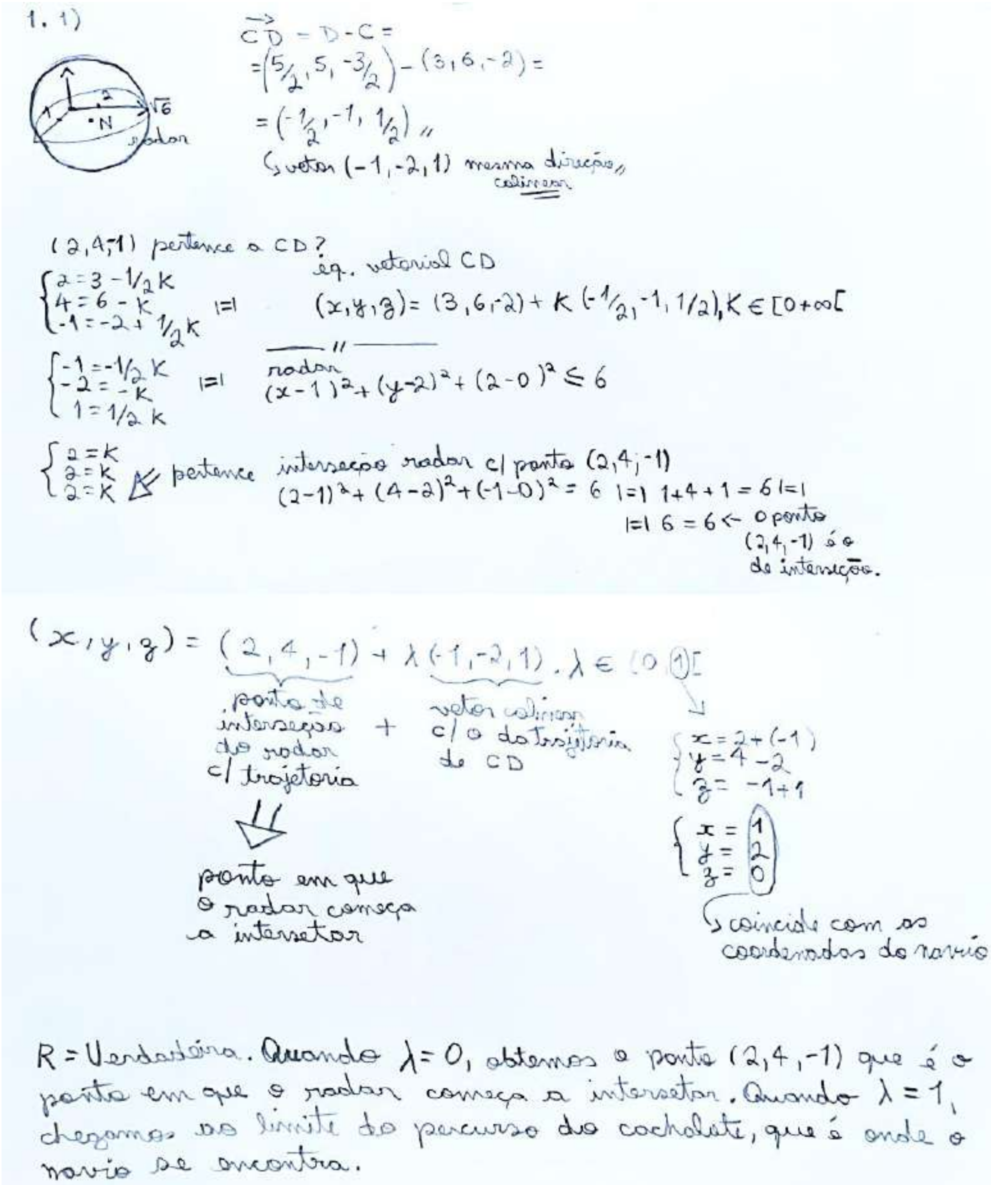


Figura 78: Segunda parte da resolução do Nuno na Questão 1.1 da Ficha de trabalho F – Parte II

O Nuno, em primeiro lugar estabelece que o ponto de coordenadas (2, 4, -1) é o ponto onde o cachalote começa a ser detetado pelo radar. Em seguida, ele argumenta que o ponto de coordenadas (1, 2, 0) está na trajetória do cachalote e representa a localização do navio. A partir desta última informação, o aluno percebe porque é que o intervalo terá que ser aberto em $\lambda = 1$, pois, tal como é dito no enunciado, o cachalote não chega a colidir com o navio. Portanto, conclui que a equação vetorial escrita na afirmação representa o maior percurso descrito pelo cachalote, pois começa no ponto de deteção inicial até chegar ao navio, sem colisões. A justificação é assim formulada num conjunto de propriedades e procedimentos da equação vetorial de uma reta e da equação reduzida de uma superfície esférica/esfera, o que lhe o confere o nível de complexidade 3C, e também está baseada numa sequência de inferências conexas, com a explicitação de todos os elementos da situação, o que fundamenta o tipo C de formalidade.



1.1)

$\vec{CD} = D - C =$

$= \left(\frac{5}{2}, 5, -\frac{3}{2}\right) - (3, 6, -2) =$

$= \left(-\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right)$ //

vetor $(-1, -2, 1)$ mesma direção, colinear

$(2,4,-1)$ pertence a CD?

eq. vetorial CD

$\begin{cases} 2 = 3 - \frac{1}{2}k \\ 4 = 6 - k \\ -1 = -2 + \frac{1}{2}k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = -\frac{1}{2}k \\ -2 = -k \\ 1 = \frac{1}{2}k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = k \\ 2 = k \\ 2 = k \end{cases}$ pertence

$(x,y,z) = (3,6,-2) + k\left(-\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right), k \in [0, +\infty[$

radar

$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-0)^2 \leq 6$

interseção radar c/ ponto $(2,4,-1)$

$(2-1)^2 + (4-2)^2 + (-1-0)^2 = 6 \Leftrightarrow 1+4+1 = 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6 = 6 \leftarrow$ o ponto $(2,4,-1)$ é o de interseção.

$(x,y,z) = \underbrace{(2,4,-1)}_{\text{ponto de interseção do radar c/ trajetoria}} + \lambda \underbrace{(-1,-2,1)}_{\text{vetor colinear c/ o da trajetória de CD}}, \lambda \in [0, 1[$

ponto em que o radar começa a intersetar

$\begin{cases} x = 2 + (-1) \\ y = 4 - 2 \\ z = -1 + 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$ coincide com as coordenadas do navio

R = Verdadeira. Quando $\lambda = 0$, obtemos o ponto $(2,4,-1)$ que é o ponto em que o radar começa a intersetar. Quando $\lambda = 1$, chegamos ao limite do percurso do cachalote, que é onde o navio se encontra.

Figura 79: Resolução da Bruna na Questão 1.1 da Ficha de trabalho F – Parte II

Nesta resolução (Figura 79), também são aplicadas propriedades da equação vetorial de uma reta e da equação reduzida de uma superfície esférica/esfera, o que fundamenta o nível de complexidade 3C, mas a Bruna não explicita como concluiu que o ponto (2,4,-1) era onde o radar começava a detetar o cachalote. A aluna, apenas verificou que o ponto pertencia à superfície esférica, assim, tanto podia ser o ponto onde o cachalote começava a ser detetado, como podia ser o ponto, pelo qual, ela sairia do alcance do radar. Portanto, a sua justificação está incompleta, e por isso atribuí o tipo de formalidade B. Adicionalmente, é importante notar, que quando a aluna fala acerca do navio, não explicita o porquê do intervalo ser aberto em $\lambda = 1$. Esta situação ocorreu em todos os alunos com o mesmo tipo de formalidade.

5.8.2. Ações do Professor e Dificuldades dos alunos

Esta parte da ficha, embora os alunos a tenham resolvido individualmente, a única dificuldade a destacar foi a forma implícita como alguns alunos justificarem as suas conclusões acerca do ponto de coordenadas (2,4,-1), o que revela que alguns alunos continuaram a não interpretar os valores das coordenadas no contexto do problema.

A introdução da ficha foi célere, visto que o enunciado da questão 1.1 desta ficha é igual ao enunciado da questão 1.1 da ficha E, apenas mudou-se a questão e as restantes questões são breves. A realização da ficha ocorreu sem grandes dúvidas, o que corrobora com a quantidade de justificações nível 3C e tipo de formalidade C, sendo apenas necessário, por vezes, **sugerir** ao aluno que tenha em atenção às propriedades do intervalo definido para o parâmetro λ. O momento de discussão coletiva, como já havia sido planeado, não ocorreu.

5.9. Questão-Aula (Anexo 17)

Na questão-aula, com o apoio do professor cooperante João Ferreira, realizei duas questões: Na primeira, questão 1.2.3 (Figura 80), foi solicitada a identificação justificada da veracidade ou falsidade de uma afirmação matemática, e na segunda questão 1.3.2 (Figura 84) foi expressamente pedido que os alunos justificassem a sua resposta.

5.9.1. Questão 1.2.3

1.2.3. Indique, justificando, o valor lógico da seguinte afirmação:
"$(x, y, z) = (0,4,4) + k(2, -1,2),\ k \in [1,3]$ é uma equação vetorial do segmento de reta $[CG]$."

Figura 80: Questão 1.2.3 da Questão-Aula

Nesta questão, vinte e dois dos vinte e quatro alunos que a resolveram, apresentaram uma justificação com base em propriedades ou procedimentos (nível de complexidade 3C). Quanto ao restante dos alunos, houve um que não justificou (nível de complexidade 0), e outro que baseou a sua justificação na autoridade externa (nível de complexidade 1).

Tabela 32: Níveis de complexidade das justificações na Questão 1.2.3 da Questão-Aula

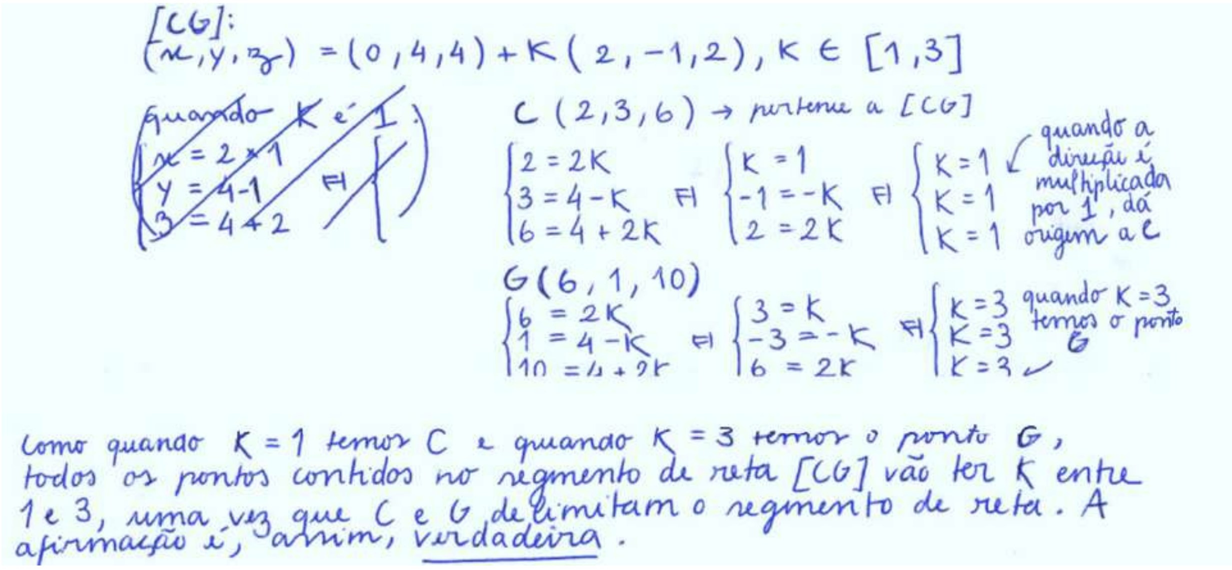
Questão 1.2.3 (Questão-aula)	Níveis de complexidade						Não resolveu
	0	1	2	3A	3B	3C	
Nº de alunos	1	1				22	2
Percentagem	4,1%	4,1%				91,8%	-

Quanto à formalidade, cinco alunos elaboraram uma justificação incompleta do ponto de vista formal, e dezoito alunos conseguiram apresentar uma justificação formal completa.

Tabela 33: Tipos de formalidade das justificações na Questão 1.2.3 da Questão-Aula

Questão 1.2.3 (Questão-aula)	**Tipos de formalidade**			Não atribuível	Não resolveu
	A	**B**	**C**		
Nº de alunos	1	4	18	1	2
Percentagem	4,3%	17,4%	78,3%	-	-

Com nível de complexidade 3C e tipo C de formalidade, começo por apresentar a resolução da Bruna (Figura 81).


[CG]:
$(x,y,z)=(0,4,4)+k(2,-1,2),\ k\in[1,3]$

~~quando k é 1: x = 2×1, y = 4-1, z = 4+2~~

$C(2,3,6) \rightarrow$ pertence a [CG]

$\begin{cases}2=2k\\3=4-k\\6=4+2k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=1\\-1=-k\\2=2k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=1\\k=1\\k=1\end{cases}$ quando a direção é multiplicada por 1, dá origem a C

$G(6,1,10)$

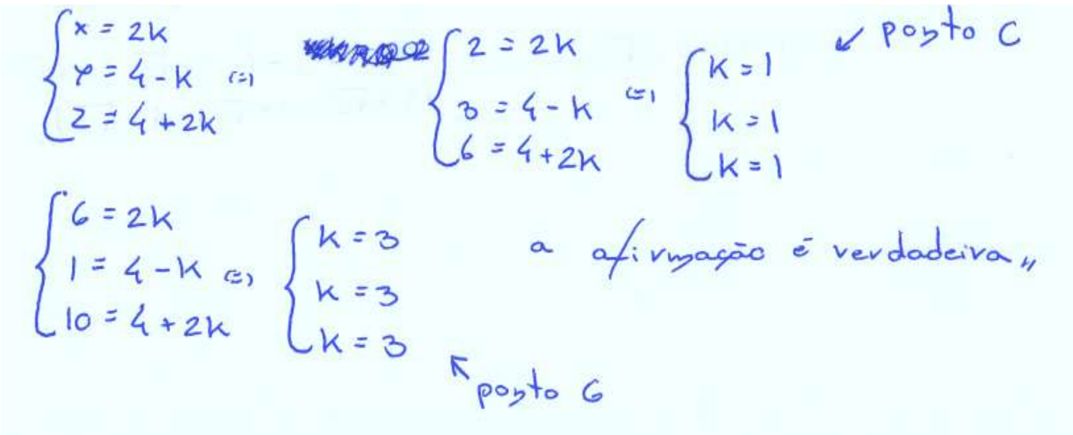
$\begin{cases}6=2k\\1=4-k\\10=4+2k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3=k\\-3=-k\\6=2k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=3\\k=3\\k=3\end{cases}$ quando k=3 temos o ponto G

Como quando k = 1 temos C e quando k = 3 temos o ponto G, todos os pontos contidos no segmento de reta [CG] vão ter k entre 1 e 3, uma vez que C e G delimitam o segmento de reta. A afirmação é, assim, verdadeira.

Figura 81: Resolução da Bruna na Questão 1.2.3 da Questão-Aula

A Bruna utilizou as coordenadas dos pontos C e G, que já estavam estabelecidas no enunciado da questão 1, e começou por verificar se os pontos pertenciam à reta. Ao determinar o valor $k=1$ para o ponto C, e o valor $k=3$ para o ponto G, fez a devida relação com o intervalo definido para k na equação vetorial, e conseguiu concluir que $(x,y,z)=(0,4,4)+k(2,-1,2), k\in[1,3]$ é uma equação vetorial do segmento de reta $[CG]$. A sua justificação com base em propriedades da equação vetorial de uma reta, e referidas de forma explicita, conferem-lhe o nível de complexidade 3C e tipo de formalidade C.

Com o mesmo nível de complexidade, mas com um tipo de formalidade inferior, encontra-se a justificação da Dália (Figura 82).



$$\begin{cases} x = 2k \\ y = 4 - k \\ z = 4 + 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 2k \\ 3 = 4 - k \\ 6 = 4 + 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = 1 \\ k = 1 \end{cases}$$ ponto C

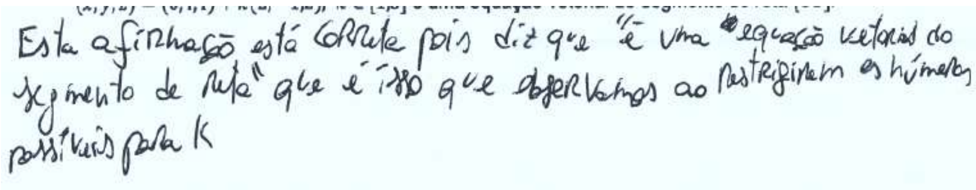
$$\begin{cases} 6 = 2k \\ 1 = 4 - k \\ 10 = 4 + 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ k = 3 \\ k = 3 \end{cases}$$ a afirmação é verdadeira

ponto G

Figura 82: Resolução da Dália na Questão 1.2.3 da Questão-Aula

A Dália aplica o mesmo procedimento que a Bruna (nível 3C), para verificar se os pontos C e G pertencem à reta, tendo obtido, igualmente, o valor o $k = 1$ para C e o valor $k = 3$ para G. No entanto, a aluna não explicita as conclusões obtidas com a determinação desses valores. Assim, apesar de também ter baseado a justificação em propriedades ou procedimentos, a sua justificação está incompleta, por isso atribuí o tipo B de formalidade.

O seguinte aluno, o Gabriel (Figura 83), também parece compreender que para justificar a veracidade da afirmação é necessário ter em atenção “os números possíveis para k”, mas não apresenta nada que sustente o seu argumento.



Esta afirmação está correte pois diz que "é uma equação vetorial do segmento de reta" que é isso que observamos ao restrigirem os números possíveis para K

Figura 83: Resolução do Gabriel na Questão 1.2.3 da Questão-Aula

A sua justificação foi baseada em afirmações do professor (nível 1 de complexidade), porque quando apresentei exemplos de equações vetoriais de segmentos de reta e comparei com as de reta, salientei que a diferença óbvia era a restrição definida para os valores de k. Quanto à formalidade, considero ser do tipo A, por estar muito incompleta.

5.9.2. Questão 1.3.2

1.3.2. O segmento de reta $[DH]$ é um raio da superfície esférica S? Justifique

Figura 84: Questão 1.3.2 da Questão-Aula

Todos os alunos que resolveram esta questão (Figura 84) justificaram a sua resposta com características do nível 3C de complexidade, mas houve cinco alunos que não terminaram a sua resolução, devido ao tempo disponível, por esta ser a penúltima pergunta da questão-aula.

Tabela 34: Níveis de complexidade das justificações na Questão 1.3.2 da Questão-Aula

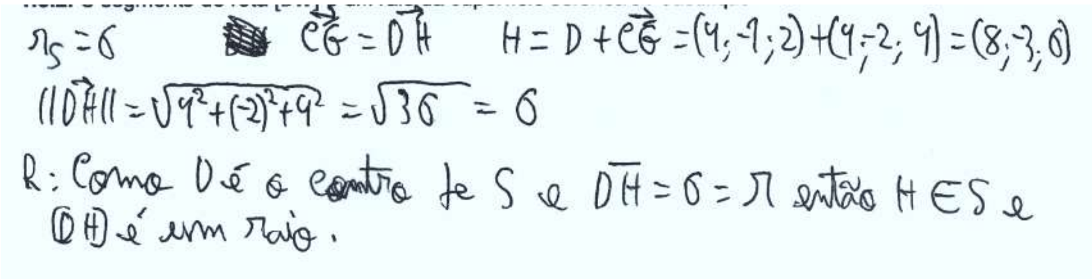
Questão 1.3.2 (Questão-aula)	**Níveis de complexidade**						Não resolveu
	0	**1**	**2**	**3A**	**3B**	**3C**	
Nº de alunos						21	5
Percentagem						100%	-

Na formalidade, apenas dois alunos dos vinte e um que a resolveram, realizaram uma justificação formal incompleta (tipo B), os restantes conseguiram apresentar uma justificação de tipo C de formalidade.

Tabela 35: Tipos de formalidade das justificações na Questão 1.3.2 da Questão-Aula

Questão 1.3.2 (Questão-aula)	**Tipos de formalidade**			Não atribuível	Não resolveu
	A	**B**	**C**		
Nº de alunos		2	19		5
Percentagem		9,5%	90,5%		-

As resoluções que vou apresentar todas com o nível 3C por basearem a sua justificação em propriedades e procedimentos do cálculo vetorial e da superfície esférica, apenas se diferenciam no tipo de formalidade.


$r_S = 6$ $\vec{CG} = \vec{DH}$ $H = D + \vec{CG} = (4;-1;2)+(4;-2;4) = (8;-3;6)$

$\|\vec{DH}\| = \sqrt{4^2+(-2)^2+4^2} = \sqrt{36} = 6$

R: Como D é o centro de S e $\overline{DH} = 6 = r$ então $H \in S$ e [DH] é um raio.

Figura 85: Resolução do Tiago na Questão 1.3.2 da Questão-Aula

O Tiago começa por indicar as informações que foram obtidas em alíneas anteriores, o raio da superfície esférica S ser igual a 6, e o vetor $\overrightarrow{CG}$ ser igual ao vetor $\overrightarrow{DH}$. Em seguida, calcula as coordenadas do ponto $H,$ e a norma do vetor $\overrightarrow{DH}$. Na resposta, como no enunciado da questão 1.3, é dito que o ponto D é centro da superfície e o aluno explicitou esse elemento, apenas era necessário provar que o ponto H pertencia à superfície esférica S, para justificar que [DH] era um raio, que foi o que o aluno fez ao assinalar que a medida do segmento de reta

[DH] é igual à medida do raio de S. Portanto, o aluno apresentou uma sequência lógica de argumentos referindo todos os elementos da situação utilizados, o que confere o tipo C de formalidade.

Com uma estratégia semelhante, mas com o tipo B de formalidade, encontra-se a resolução da Clara (Figura 86).

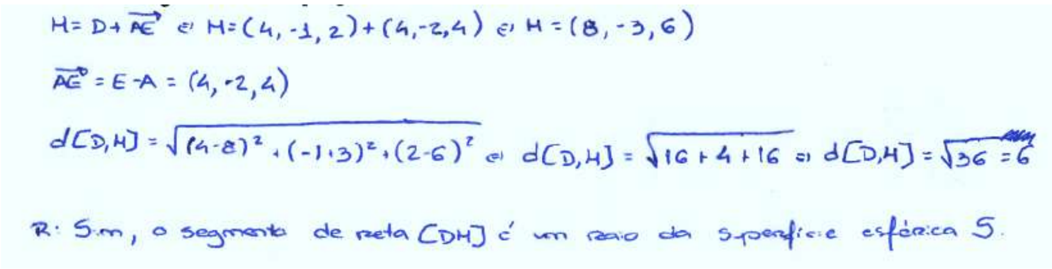

$H = D + \vec{AE} \Leftrightarrow H = (4,-1,2)+(4,-2,4) \Leftrightarrow H = (8,-3,6)$
$\vec{AE} = E - A = (4,-2,4)$
$d[D,H] = \sqrt{(4-8)^2+(-1+3)^2+(2-6)^2} \Leftrightarrow d[D,H] = \sqrt{16+4+16} \Leftrightarrow d[D,H] = \sqrt{36} = 6$
R: Sim, o segmento de reta [DH] é um raio da superfície esférica S.

Figura 86: Resolução da Clara na Questão 1.3.2 da Questão-Aula

Esta aluna, assim como o Tiago, calcula as coordenadas do ponto H e a norma do vetor $\overrightarrow{DH}$, mas na sua resposta não indica que o ponto D é o centro da superfície esférica S, e não explicita a relação entre a distância do segmento de reta $[DH]$ com o comprimento do raio de S. Assim a sua justificação está incompleta, o que sustenta o tipo de formalidade atribuído.

Em seguida, com o tipo B de formalidade, mas com uma estratégia de resolução distinta das anteriores, apresento a resolução do Gustavo (Figura 87).

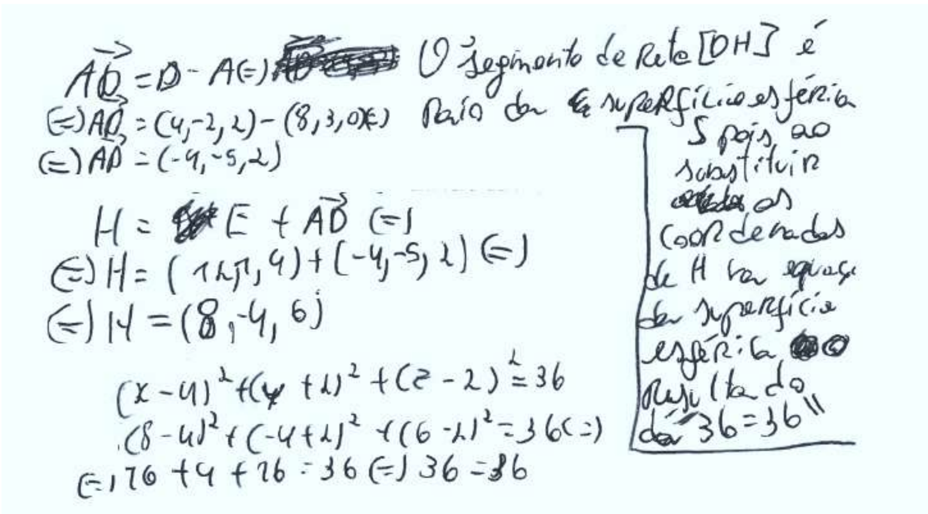

$\vec{AD} = D - A \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \vec{AD} = (4,-2,2) - (8,3,0) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \vec{AD} = (-4,-5,2)$
$H = E + \vec{AD} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow H = (12,1,4) + (-4,-5,2) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow H = (8,-4,6)$
$(x-4)^2+(y+2)^2+(z-2)^2 = 36$
$(8-4)^2+(-4+2)^2+(6-2)^2 = 36 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 16+4+16 = 36 \Leftrightarrow 36 = 36$
O segmento de Reta [DH] é Raio da superfície esférica S pois ao substituir as coordenadas de H na equação da superfície esférica resultado deu 36=36"

Figura 87: Resolução da Gustavo na Questão 1.3.2 da Questão-Aula

O Gustavo, em vez de calcular a norma do vetor $\overrightarrow{DH}$, decidiu verificar se o ponto H pertencia à superfície esférica S, utilizando a equação reduzida de S. Esta estratégia é suficiente para poder provar que o segmento de reta [DH] é um raio da superfície esférica, porque, sabendo que o ponto D é o seu centro, basta verificar se o ponto H pertence a S. Porém, embora o procedimento e as propriedades aplicadas validem a conclusão do aluno, e por isso a atribuição do nível 3C de complexidade, na sua resposta, deveria estar explicito que a veracidade da sua conclusão também advém de D ser centro de S, e a linguagem adotada podia ser mais formal. Por estas duas razões, atribuí à sua justificação o tipo B de formalidade.

5.9.3. Dificuldades dos alunos

A resolução da Bruna, da Dália e do Gabriel exemplificam todas as resoluções que ocorreram na questão 1.2.3 da questão-aula, com exceção ao caso dos alunos que não resolveram ou que não justificaram. Os alunos contabilizados como "não resolveu", o foram, por terem faltado à questão-aula, e o aluno que não justificou apenas escreveu o valor lógico da afirmação. A dificuldade desta questão era os alunos relacionarem os valores que limitavam o intervalo definido para o parâmetro k e as coordenadas dos pontos C e G. A maioria dos alunos identificou a necessidade dessa relação e a explicitou, mas houve quem apenas a mencionasse sem apresentar cálculos, ou calcularam, mas não explicitaram com um conjunto de inferências organizadas o significado dos resultados obtidos.

A questão 1.3.2 apresentou melhores resultados que a questão anterior, tendo sido a maior dificuldade a de não compreenderem a necessidade de explicitar a relação entre a distância do segmento de reta $[DH]$ com o comprimento do raio de S.

Assim, a maior dificuldade em ambas as questões, foi explicitar todas as informações para obter uma justificação completa.

5.10. Análise das Entrevistas

As informações obtidas por meio das entrevistas aos alunos foram de grande valia para o entendimento do impacto que esta investigação proporcionou a estes. O guião utilizado é composto por quatro perguntas, do qual se encontra no Anexo 18. De forma geral foi possível identificar a satisfação e grande aceitação quanto ao método utilizado para as aulas. Entretanto há que se pontuar os aspectos mais relevantes quanto as impressões expressas pela turma.

A primeira pergunta versa sobre a opinião dos alunos sobre o que lhes foi solicitado nas aulas em que foi pedida a opinião acerca das resoluções dos demais colegas, ainda se estes julgam que as suas opiniões ajudaram os demais colegas, e se as opiniões dos colegas também os ajudaram com seu aprendizado. A resposta massiva dos grupos ressalta que o facto de que visualizar a resolução dos outros colegas é algo importante para o aprendizado geral de cada grupo, devido à visualização e análise de raciocínios matemáticos e justificações diferentes dos próprios. Segundo os alunos isto corrobora com a comparação quanto às próprias resoluções e auxilia a identificação de erros na resolução de cada grupo apresentado, facilitando uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos abordados. Todos os grupos afirmaram que as aulas em que houve opinião da turma os ajudaram, bem como acreditaram que suas opiniões também ajudaram a seus colegas.

A segunda pergunta trata acerca das dificuldades sentidas durante as resoluções das fichas, com ênfase às questões que solicitavam justificação. O ponto de maior dificuldade para a maior parte dos grupos foi o ato de justificar em si, em como explicar o raciocínio através com as suas próprias palavras. Os sete grupos de alunos entrevistados perceberam uma mudança significativa e gradual melhora no entendimento do que caracteriza uma justificação válida, e também, a consequente redução da dificuldade quanto à formulação das justificações, entre a primeira e última aula que continham a resolução e discussões de questões deste tipo. Segundo os entrevistados, isto se deu devido à constância de questões desta natureza, que trouxe maior familiarização dos alunos em como devem elaborar as suas justificações.

A terceira pergunta possui como foco a identificação dos aspectos desenvolvidos durante as aulas que os alunos consideram que os ajudou a ultrapassar as dificuldades identificadas na pergunta anterior. Houve por parte da maioria dos alunos a reflexão de que a prática da discussão coletiva trás maiores possibilidades de visualizar várias maneiras de resolver uma questão, sendo estas mais ou menos elaboradas que as próprias resoluções. Em segundo lugar de destaque, ainda sobre as discussões coletivas, houve o aspecto relacionado à apresentação das resoluções para a turma que, segundo eles, os auxiliou na clarificação do raciocínio por serem incentivados a apresentá-las aos demais colegas da turma. Em último, o aspecto que mais os auxiliou, citado por dois grupos, foi o momento da realização da ficha, devido ao acompanhamento do docente por sugerir representações e justificações alternativas.

A quarta pergunta questiona os entrevistados sobre a dinâmica em grupo durante as aulas ministradas, se gostaram de trabalhar em conjunto com outros colegas e se o trabalho em grupo ajudou a superar as dificuldades durante as resoluções das fichas. A resposta da maioria dos grupos foi positiva quanto ao trabalho em grupo, tendo apenas um dos alunos que não se agradou deste tipo de dinâmica em sala de aula, devido, segundo ele ao seu carácter pessoal introvertido. Quanto ao auxílio durante as resoluções das fichas todos os grupos afirmaram que isto os auxiliou devido aos aspectos de complementação do raciocínio matemático de cada aluno, rapidez nas resoluções, redução significativa nas dificuldades encontradas quando das resoluções individuais pelo apoio mútuo e diferentes níveis de entendimento matemático entre os membros dos grupos e por se tratar de uma dinâmica diferente e mais aprazível da habitualmente empregada em sala de aula.

6. CONCLUSÕES

No último capítulo deste relatório, apresento as conclusões deste estudo, com o objetivo de responder às questões de investigação com base na análise de dados. Em seguida, encerro com uma breve reflexão sobre o estudo e as aprendizagens adquiridas ao longo desta intervenção e as implicações para minha prática futura.

6.1. Caracterização das justificações matemáticas apresentadas pelos alunos

Ao examinar as resoluções dos alunos nas fichas de trabalho e na questão-aula, fica evidente que as justificações dos alunos variaram em termos de complexidade. As justificações de natureza dedutiva, que se baseiam em propriedades ou procedimentos matemáticos (nível 3C), foram as mais comuns, não tendo havido uma única questão em que não houvesse um aluno a elaborar uma justificação nesse nível. No entanto, só a partir da ficha de trabalho D – Parte II, que a percentagem de justificações 3C ultrapassou constantemente os restantes níveis. Acredito que isso se deva à dificuldade das questões ter começado a aumentar nesse momento, o que impossibilitou o surgimento de justificações com outro nível, visto que as resoluções estavam muito dependentes da aplicação de procedimentos relativos à equação vetorial de uma reta.

Em relação às justificações que decorrem da coerência lógica, estas estiveram presentes em menor número. O nível 3A apenas ocorreu na questão 1.a), na questão 2.d) e na questão 2.f), tendo sido preponderante na 1.a) e na 2.f), devido ao facto de a maior parte dos alunos terem optado por apresentar um contraexemplo para justificar a sua resposta. Em menor número, 15,4% dos alunos, na questão 2d) da mesma ficha, tentaram realizar uma justificação por absurdo. Do que pude depreender acerca deste nível, os alunos só justificam com base em princípios lógicos, quando é substancialmente mais fácil apresentar um contraexemplo do que utilizar propriedades, definições ou teoremas matemáticos, ou quando não existe um procedimento óbvio para resolver uma questão, tal como sucedeu na questão 2d).

As justificações baseadas na evidência empírica (nível 2) foram observadas, em grande percentagem, na análise das duas primeiras questões, mas por razões distintas. Na primeira questão, era necessário identificar que uma determinada propriedade era comum a um conjunto alargado de objetos, portanto, os alunos tinham que generalizar. A justificação dessa generalização baseou-se, sobretudo, em casos particulares (56,5%), sem, no entanto, todos terem noção de que isso não constitui uma justificação matematicamente válida. Tanto que, após essa questão, a experimentação ingénua de validar uma generalização com base em alguns exemplos, apenas ocorreu novamente na questão 2 da ficha de trabalho D – Parte II, mas com uma frequência relativa menor que 20%. Na segunda questão, os alunos justificaram elementos cruciais da sua resolução, com base em perceções da figura. Esta situação, ocorreu ainda na questão 2d) da ficha de trabalho C, devido ao facto de alguns alunos fundamentarem o valor lógico atribuído com base numa descrição visual da afirmação. As justificações baseadas em impressões visuais vagas, são um fenómeno decorrente no tema da Geometria (NCTM, 2009), e ao longo da minha intervenção, ocorreram sempre que um aluno tinha noção de que o que estava a dizer era verdade, apresentando por vezes um desenho a retratar a situação, mas depois desconhecia qual a propriedade que validava o seu argumento. Esta situação, acontecia, sobretudo, com alunos com um certo domínio na utilização de representações visuais, mas que depois tinham dificuldades em estabelecer conexões com outros tipos de representação, principalmente a simbólica.

As justificações que se basearam em autoridade externa (nível 1) foram raras, tendo acontecido apenas em dois momentos: na ficha de trabalho E e na Questão-Aula. Na ficha E, ocorreu uma utilização inapropriada da simbologia matemática, onde era visível que a preocupação não era o conteúdo da justificação, mas sim a sua estrutura. Na Questão-Aula, houve um aluno que para justificar a veracidade de uma afirmação, utilizou uma adaptação de uma frase que eu proferi durante as aulas. A pouca ocorrência de justificações deste nível não me permite tirar ilações credíveis sobre o porquê de terem acontecido, apenas posso supor que na Ficha E o aluno conhecia o procedimento, mas não sabia usar a simbologia adequada, e na Questão-Aula, por se tratar de uma ficha de avaliação sumativa, o aluno preferiu utilizar uma frase do professor, do que não justificar. Assim, considero que a utilização esporádica de justificações deste nível deve-se ao facto de os alunos desta turma terem consciência de que estas raramente são consideradas válidas.

As justificações de nível 0, ou seja, respostas sem justificação, também estiveram presentes em algumas resoluções, sendo a sua maior percentagem na primeira questão a ser analisada, porque houveram alguns alunos que durante a introdução da ficha, estiverem com pouca atenção e negligenciaram a apresentação de justificações. Os restantes casos foram em perguntas de verdadeiro e falso, onde os alunos não sabiam a resposta e apenas optaram por uma das hipóteses, sem justificar.

Por último, não houve qualquer justificação baseada em exemplos genéricos (3B). Considero que o principal motivo seja por não ter criado uma questão que estivesse especificamente orientada para esse efeito, apesar de nenhuma das outras questões terem sido realizadas com isso mente, pois um dos objetivos era haver justificações de natureza diversa.

Portanto, isto evidência que as justificações deste nível são raras de acontecer fora do âmbito "experimental", onde operações são realizadas com resultados antecipados (Sowder & Harel, 1998).

Em termos de formalidade, as justificações do tipo B (incompletas do ponto de vista formal) foram predominantes em quase todas as questões até à ficha de trabalho D. Com destaque para a questão 1.2 da ficha de trabalho B e para a questão 2.e) da ficha de trabalho C, onde todos os alunos apresentaram justificações do tipo B. Frequentemente, o motivo para esta classificação era a falta de sustentação em alguns passos que os alunos consideravam evidentes e, portanto, não julgavam necessário explicar de forma mais completa. As outras razões variavam entre o esquecimento de alguma palavra ou expressão que consequentemente alterava o significado do argumento, e a apresentação de respostas sem a indicação explicita da estratégia de resolução.

As justificações do tipo C (formais e completas) foram mais comuns, a partir do mesmo momento em que as justificações nível de complexidade 3C começaram a ser. Considero um acontecimento plausível, visto que quanto mais as questões começaram a depender de determinados procedimentos, sem que houvesse muita variação, melhor os alunos interiorizaram como deveriam escrever uma justificação válida e completa para essas situações. Não obstante, também acredito que a ênfase colocada na forma como os alunos deveriam apresentar uma justificação válidas e completa, especialmente na ficha de trabalho D – Parte I, e nos momentos de discussão coletiva, os tenha incentivado nesse sentido.

As justificações do tipo A, foram raras, tendo acontecido em duas situações: A primeira foi numa questão de atribuição de valor lógico, onde o aluno para justificar que a afirmação era verdadeira, por pouco não copiou a própria a afirmação. A segunda foi na Questão-Aula, onde a justificação do aluno foi muito incompleta. Portanto, situações muito específicas e distintas, que não apresentam qualquer relação entre si. Isto revela que os alunos desta turma, tentaram sempre ser minimamente formais nas suas justificações, mesmo que algumas fossem incompletas.

6.2. Dificuldades dos alunos na formulação de justificações

Ao analisar as justificações, ficou claro que os alunos enfrentaram algumas dificuldades, tanto na aplicação dos conceitos lecionados ao longo da intervenção letiva, quanto na elaboração de justificações válidas e completas.

Quando se trata de justificar generalizações, apesar de se ter verificado alguma evolução na ficha de trabalho D – Parte II, houve quem continuasse a validar a sua generalização com base em casos particulares, o que evidencia a dificuldade de alguns alunos em validar sem particularizar. Esta tendência, daquilo que pude compreender, está intimamente relacionada com a falta de prática na linguagem algébrica, e por isso não conseguem justificar dedutivamente.

Em relação às questões com um grau de dificuldade superior, na questão 1.2 da Ficha de trabalho B, na questão 1.1 da Ficha de trabalho E e na questão 1.1 da Ficha de trabalho F, os alunos não apresentaram dificuldades significativas na aplicação dos conceitos, já que todas as resoluções se enquadram no nível 3C. As questões apresentavam uma estrutura fechada, ou seja, as instruções eram claras, o que incentivava os alunos a justificar com base no que aprenderam, isso explica a predominância de justificações de nível 3C nesse contexto. No entanto, são também nestas questões que surgem a maior quantidade de justificações com erros significativos na simbologia matemática, omissões de elementos importantes, e a falta de encadeamento lógico nos argumentos utilizados.

No que diz respeito à refutação de afirmações, apesar de se considerar que os alunos frequentemente enfrentam desafios em compreender que um contraexemplo para uma afirmação matemática deve cumprir as condições estipuladas na própria afirmação, enquanto simultaneamente a contradiz (Galbraith, 1995, como citado por Mata-Pereira, 2018) não houve nenhuma situação no presente estudo em que um aluno tivesse tido dificuldades em identificar e aceitar que um único exemplo é suficiente para invalidar uma afirmação.

Quando se trata da formalidade das justificações, a presença de justificações do Tipo C indica que alguns alunos se esforçaram por apresentar justificações mais completas. Ainda assim houve um grande número de justificações incompletas, muitas vezes devido à omissão de propriedades ou elementos importantes.

Em resumo, os alunos enfrentaram desafios na elaboração de justificações válidas e completas, na aplicação correta de conceitos matemáticos e na utilização apropriada da notação matemática em diversas questões e tarefas analisadas. Estas dificuldades variaram de acordo com a natureza das questões e a formalidade exigida.

6.3. Características potenciadoras da abordagem exploratória no desenvolvimento das justificações dos alunos

No que diz respeito à realização das fichas de trabalho, os alunos relataram, durante as entrevistas, que foram constantemente solicitados a fundamentar as respostas com suas próprias palavras. Eles consideraram esse elemento como fundamental para a evolução das justificações, pois, em vez de abordarem as questões de forma passiva, seguindo simplesmente os conceitos matemáticos aprendidos, os alunos foram incentivados a pensar criticamente.

Nas primeiras aulas, os alunos demonstraram ter dificuldade em resolver questões que exigiam justificações. Isso ficou evidente nas entrevistas, onde os alunos afirmaram sentir-se desorientados diante de questões desse tipo, por não estarem habituados a justificar frequentemente. No entanto, ao longo da intervenção, houve um claro desenvolvimento. Muitos alunos afirmaram que se sentiam mais confiantes e capazes de lidar com questões que exigiam justificações, demonstrando um maior domínio neste processo de raciocínio matemático.

Quanto à discussão das fichas de trabalho, a prática de os alunos apresentarem e explicarem suas resoluções para que os colegas as analisassem, desempenhou um papel fundamental em suas aprendizagens. Isto porque a visualização e análise de estratégias diversas, permitiu os alunos fossem além do que haviam inicialmente desenvolvido, o que facilitou a identificação de erros, tanto em suas próprias resoluções, quanto nas resoluções dos colegas, e contribuiu para a compreensão dos conceitos matemáticos.

Nestes momentos, enquanto professor, percebi que a ação de "convidar" os alunos a discutirem suas resoluções tornou-se cada vez menos necessária, pois os próprios alunos começaram a tomar a iniciativa de as querer debater. As ações de "informar/sugerir" eram principalmente relevantes quando os alunos enfrentavam muitas dificuldades, e nesses casos, eu precisava fornecer informações adicionais para enriquecer o debate. As estratégias de "apoiar/guiar" e "desafiar" foram as mais eficazes no desenvolvimento das justificações dos alunos, especialmente durante a ficha de trabalho D – Parte I. Ao orientar os alunos para reconhecer os aspectos essenciais na elaboração de uma justificação válida e completa, e depois desafiá-los a apresentar uma justificação nesses moldes, foi quando observei uma evolução significativa nas suas justificações.

Nas questões que envolviam os alunos justificarem uma generalização e nos problemas, observou-se uma diminuição das justificações no nível 2. Isso ocorreu porque os alunos passaram a evitar justificar uma generalização com base em casos particulares, e nos problemas, deixaram de usar perceções como justificação. Em relação à formalidade das justificações, observou-se uma evolução mais evidente, pois os alunos passaram a expressar por escrito o que antes comunicavam apenas oralmente.

Assim, foi durante as ações de apoiar/guiar e desafiar, especialmente durante os momentos de discussão coletiva e a resolução de fichas que incluíam questões que solicitavam aos alunos a análise de justificações apresentadas por outros, que se observou o maior desenvolvimento das justificações dos alunos.

É importante mencionar que o trabalho em grupo também promoveu a cooperação e o apoio mútuo entre os alunos, independentemente dos seus diferentes níveis de aproveitamento. Essa colaboração mostrou-se presente e altamente benéfica ao longo de todo o processo de trabalho, seja entre os membros de cada grupo durante a elaboração das resoluções, como nas discussões coletivas em que as trocas de ideias e entendimentos complementares se tornavam mais fundamentais para aprofundar os conceitos presentes nas fichas.

6.4. Reflexão Final

No contexto desta investigação, enfrentei desafios ao procurar promover as justificações matemáticas, tanto na elaboração das fichas quanto durante as aulas. Um dos meus objetivos nas fichas era estimular diferentes justificações de natureza diversas, mas nas duas últimas aulas isso tornou-se praticamente impossível devido a ser necessário apresentar o procedimento para calcular pontos de interseção. Portanto, nem sempre foi fácil conciliar esse objetivo com a calendarização dos conceitos a serem lecionados.

No que se refere à promoção do raciocínio matemático em sala de aula, percebo que nem sempre minhas intervenções estiveram alinhadas com esse propósito. Em algumas situações, deixei de questionar os alunos de forma a desafiá-los a aprofundar suas respostas e tive que ser eu a informar as características de uma justificação válida e completa.

No que diz respeito às aprendizagens dos alunos no cálculo vetorial, minha avaliação é que, inicialmente, os objetivos estipulados não foram completamente alcançados. No entanto, após a questão-aula, tive a oportunidade de revisar os conhecimentos adquiridos pelos alunos, e a turma manteve uma classificação similar à obtida no final do 2.º Período. Por isso considero, que talvez fossem necessárias mais aulas para conseguir adequar os objetivos de aprendizagem com os do estudo.

A partir das aulas lecionadas e do estudo realizado, ficou claro a importância das tarefas no processo de ensino. As tarefas, quando escolhidas, planejadas e implementadas de forma adequada, podem proporcionar oportunidades de aprendizagem muito ricas. As minhas questões foram realizadas segundo os princípios definidos no Projeto Raciocínio Matemático e Formação de Professores para promover a justificação, e pude compreender que diferenciar o género de questões é imprescindível para chegar a todos os tipos de perfis de alunos.

A previsão de tempo necessário para as aulas foi um dos maiores desafios enfrentados durante a minha intervenção. Esse fator frequentemente condicionou o desenvolvimento das aulas. A previsão do tempo é especialmente importante, pois está relacionada à planificação das aulas, que, por sua vez, depende da compreensão do público-alvo. Para lidar com esses obstáculos, muitas vezes foi necessário fazer adaptações em tempo real durante as aulas.

Ao ter desempenhado o papel de professor e investigador ao longo desta intervenção, levou-me a concentrar no meu desempenho como professor, examinando o discurso que utilizava, a organização das informações nas aulas e a preparação das lições ministradas. Esse duplo papel enriqueceu minha compreensão da dinâmica da sala de aula e me ajudou a aprimorar minha abordagem pedagógica.

As aulas de ensino-aprendizagem exploratório, apesar de desafiantes, tanto para mim, como para os alunos, revelaram-se uma mais-valia no meu aprendizado, porque pude constatar a reação dos alunos a esta abordagem de ensino, que no início acharam fastidiosa por terem que explicar as suas resoluções, mas depois eles já tomavam a iniciativa de o fazer, na busca por querer compreender todos os elementos relacionados a sua resolução.

Em resumo, esta experiência de ensino proporcionou-me aprendizagens em duas dimensões essenciais. Primeiro, aprendi muito sobre como implementar a metodologia a ensino-aprendizagem exploratório. Segundo, como promover as justificações matemáticas dos alunos pode influenciar a sua visão acerca da Matemática.

Com base nessas aprendizagens, pretendo incorporar nas minhas futuras aulas a abordagem exploratória, mas com uma melhor planificação das aulas, e com tarefas que leve os alunos a discutir mais entre si.

REFERÊNCIAS

Agrupamento de Escolas de Rainha Dona Leonor. (2019). *Projeto Educativo*. Retirado de http://nsite.aerdl.eu/images/DocsAgrupamento/AERDL/Doc_Gerais/PE-_aprovado_2019-22-_final.pdf.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In D. Pimm (Eds.) *Mathematics, teacher and children* (pp. 216-235). London: Hodder & Stoughton

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*: Uma introdução à *teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Breda, A., Trocado, A., & Santos, J. (2013). O GeoGebra para além da segunda dimensão. *Indagatio Didactica*, 5(1), 61–83.

Brodie, K. (2010). *Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms*. Boston, MA: Springer.

Bruno, I. (2006). *Avaliação das aprendizagens: O processo de regulação através do feedback – um estudo em Físico-Química no 3º ciclo do ensino básico*. (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa).

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, 115, 11-17.

Direção-Geral da Educação. (2018). *Aprendizagens Essenciais de Matemática 10.º ano do Ensino Secundário*. Portugal.

Fernandes, D. (2005). *Avaliação das aprendizagens: Desafios às teorias, práticas e políticas*. Lisboa: Texto Editores.

Harel, G., & Rabin, J. M. (2010). Teaching practices associated with the authoritative proof scheme. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(1), 14-19.

Henriques, A. (2010). *O pensamento matemático avançado e a aprendizagem da análise numérica num contexto de actividades de investigação* (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa).

Hughes, E.K., Smith, M.S., Stein, M.K., Engle, R.A. (2008). Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell, *Mathematical Thinking and Learning*. 10:4, p. 313-340.

IEUL. (2016). *Carta Ética para a Investigação em Educação e Formação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa*. Diário da República, 2.ª série - N.º 52 - 15 de março de 2016. Disponível em http://www.ie.ulisboa.pt/investigacao/comissao-de-etica.

Kosko, K., Rougee, A., & Herbst, P. (2014). What actions do teachers envision when asked to facilitate mathematical argumentation in the classroom? *Mathematics Education Research Journal, 26*(3), 459-476.

Krussel, L., Edwards, B., & Springer, G.T. (2004). The teacher's discourse moves: A framework for analyzing discourse in mathematics classrooms. *School Science and Mathematics, 104*(7), 307-312. doi:10.1111/j.1949-8594.2004.tb18249.x

Mata-Pereira, J. (2018). *As ações do professor para promover o raciocínio matemático na sala de aula* (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa). http://hdl.handle.net/10451/34861.

MEC. (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática A do Ensino Secundário*. Lisboa: MEC.

Monteiro, J. (2018). *Aprendizagem de tópicos de Geometria Analítica no Espaço com recurso ao GeoGebra: uma experiência com alunos do 10º ano.* (Tese de Mestrado, Universidade do Minho).

NCTM. (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM.

NCTM. (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: APM.

NCTM. (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

NCTM. (2009). *Focus in high school mathematics: Reasoning and sense making*. Reston.

NTCM. (2017). *Princípios para a ação: Assegurar a todos o sucesso em Matemática.* Lisboa: APM.

Oliveira, P. (2008). O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia soft. *Educação e Matemática*, 100, 3-9.

Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.ºciclo para a elaboração de um quadro de referência. Quadrante, 22(2), 29- 54. https://doi.org/10.48489/quadrante.22895.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Org), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM. 124

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). APM.

Ponte, J. P. (2007). Investigations and explorations in the mathematics classroom. *ZDM,* 39(5-6), 419-430.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante, XXII*(2), 55-81.

Ponte, J. P., Boavida, A., Graça, M., & Abrantes, P. (1997). *Didáctica da Matemática*. DES.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2008). O simbolismo e o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. *Educação e Matemática*, 100, 89-96.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Henriques, A. (2012). O raciocínio matemático nos alunos do ensino básico e do ensino superior. *Praxis Educativa.* 7(2), 355-377.

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Mata-Pereira, J. (2020). Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula? *Educação e Matemática*, 156, 7-11.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante, XXII*(2), 55-81.

Ponte, J. P., & Serrazina, M. L. (2000). *Didática da Matemática para o 1.º ciclo do ensino básico.* Lisboa: Universidade Aberta

Raposo, D., Gomes, L. (2021). *Expoente 10 – Volume 1*. Matemática A. Ensino Secundário. 10.° Ano de Escolaridade. Edições ASA.

REASON. (2020). Princípios para elaboração de tarefas para promover o raciocínio matemático nos alunos. Disponível em: http://reason.ie.ulisboa.pt/wpcontent/uploads/2020/12/Princi%CC%81pios-para-design-detarefas_vDraft_15-dez-2020.pdf.

Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2009). Algebraic reasoning through patterns: Findings, insights, and issues drawn from a three-year study on patterns are intended to help teach prealgebra and algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 15(4), 213-221.

Sherin, M. (2002). A balancing act: Developing a discourse community in a mathematics classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*(3), 205-233. doi:10.1023/A:1020134209073

Tuckman, B. W. (2005). *Manual de investigação em educação*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Wood, T. (1999). Creating a context for argument in mathematics class. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 171-191.

Anexo 01: Plano de Trabalho – Aula 08-02-2023

<table>
<tr><th colspan="2">PLANO DE AULA</th></tr>
<tr><td>ESCOLA SECUNDÁRIA Rainha Dona Leonor
Matemática 10.º Ano
08 fevereiro 2023
Hora: 10:00h às 11:30h</td><td>Domínio/Unidade didática: Cálculo Vetorial no Espaço

SUMÁRIO:

▪ Introdução ao cálculo vetorial no espaço e resolução de exercícios.</td></tr>
<tr><th colspan="2">TÓPICOS</th></tr>
<tr><td colspan="2">▪ Coordenadas de vetores no espaço.
▪ Adição de vetores: regras do triângulo e do paralelogramo.
▪ Operações com coordenadas de vetores no espaço: Diferença de dois pontos; Soma de um ponto com um vetor; Produto de um número real por um vetor; Soma e diferença de vetores; Norma de um vetor.</td></tr>
<tr><th colspan="2">OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM</th></tr>
<tr><th>GERAL</th><th>ESPECÍFICOS</th></tr>
<tr><td>▪ Estender as propriedades geométricas e algébricas de vetores no plano ao espaço.</td><td>▪ Determinar as coordenadas de um vetor no espaço.
▪ Aplicar a regra do triângulo e do paralelogramo com vetores no espaço.
▪ Operar com coordenadas de vetores no espaço.</td></tr>
<tr><th colspan="2">CAPACIDADES TRANSVERSAIS</th></tr>
<tr><td colspan="2">▪ Comunicação Matemática – Comunicar usando diversas formas de representação (Visual, Simbólica e Verbal).
▪ Raciocínio Matemático.</td></tr>
<tr><th colspan="2">CONHECIMENTOS PRÉVIOS</th></tr>
<tr><td colspan="2">▪ Definições e propriedades de vetores no plano.
▪ Manipulação de expressões algébricas (7.º e 8.º ano).
▪ Planos e eixos coordenados.</td></tr>
<tr><th colspan="2">RECURSOS</th></tr>
<tr><th>Professor</th><th>Alunos</th></tr>
<tr><td>▪ PowerPoint
▪ Geogebra
▪ Manual Máximo 10
▪ Quadro branco</td><td>▪ Manual Máximo 10
▪ Caderno</td></tr>
<tr><th colspan="2">METODOLOGIA DE TRABALHO</th></tr>
<tr><td colspan="2">▪ Trabalho em grupo-turma durante a revisão de conteúdos.
▪ Trabalho autónomo durante a realização de exercícios.
▪ Discussão das resoluções dos exercícios, em grupo-turma.</td></tr>
</table>

AVALIAÇÃO

- Avaliação formativa: No decorrer do trabalho autónomo, usando a observação como instrumento de avaliação, o professor deve averiguar a participação e o interesse do aluno. No momento da revisão de conteúdos e da discussão das resoluções dos exercícios, o professor deve avaliar a participação e a capacidade do aluno em exprimir as suas ideias, escrita e oralmente, verificando o rigor matemático.

DESENVOLVIMENTO DA AULA

A aula será dividida em nove momentos, correspondendo respetivamente a:

- Entrada inicial dos alunos (5 minutos);
- Revisão de conteúdos sobre a caracterização e representação de vetores (10 minutos);
- Apresentação e discussão, em grupo-turma, sobre a relação entre a aplicação da regra do triângulo e do paralelogramo na adição de vetores no plano e no espaço (10 minutos);
- Resolução autónoma de um exercício (5 minutos);
- Correção do exercício e esclarecimento de dúvidas (10 minutos);
- Apresentação e resolução de um exercício, em turma, sobre como determinar coordenadas de vetores no espaço (10 minutos);
- Apresentação e discussão, em grupo-turma, sobre propriedades das operações com coordenadas de vetores no espaço (10 minutos);
- Resolução autónoma de exercícios do manual *Máximo 10* (15 minutos);
- Correção dos exercícios e esclarecimento de dúvidas (15 minutos).

➢ MOMENTO I (10:00 -10:05)

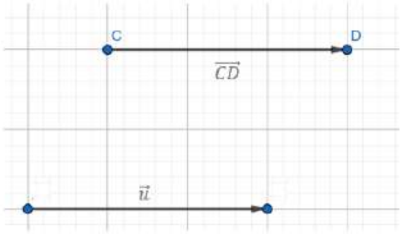
Este momento terá início com a entrada inicial dos alunos.

➢ MOMENTO II (10:05 -10:15)

Este momento será dedicado a revisões sobre caracterização e representação de vetores, onde deve ser relembrado:

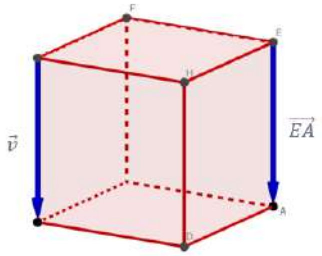
- Um vetor fica caracterizado por uma direção, um sentido e um comprimento.
- A representação literal e gráfica de vetores.
- Segmentos orientados equipolentes determinam o mesmo vetor.
- A definição de vetor posição de um ponto.

Exemplo no plano



$$\vec{u} = \overrightarrow{CD}$$

Exemplo no espaço

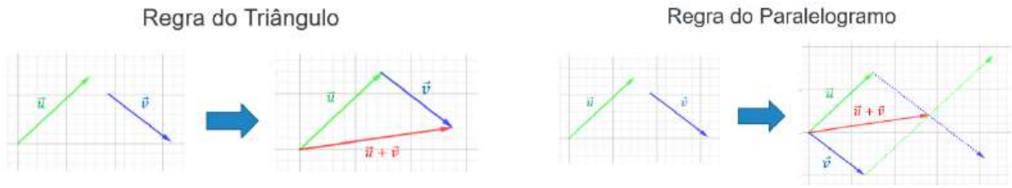


$$\vec{v} = \overrightarrow{EA}$$

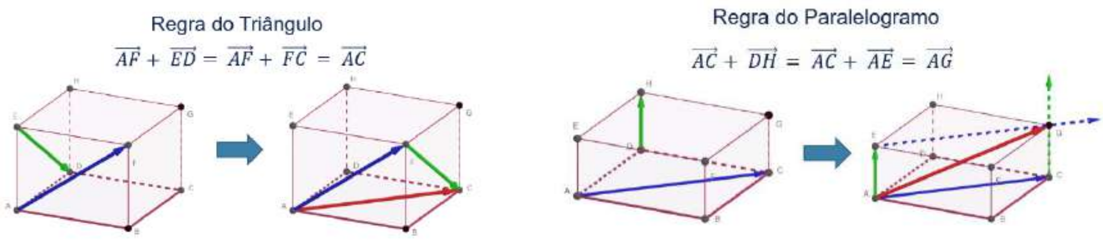
- **MOMENTO III (10:15-10:25)**

Neste momento serão apresentados e discutidos, com o auxílio do Geogebra, alguns exemplos sobre a forma como os alunos aplicavam a regra do triângulo e do paralelogramo para somar vetores no plano, a fim de aplicar as respetivas regras com vetores no espaço.

Exemplo no plano



Exemplo no espaço



- **MOMENTO IV (10:25-10:30)**

Este momento será para os alunos resolverem um exercício autonomamente sobre a aplicação da regra do triangulo e do paralelogramo com vetores no espaço.

Exercício 1:

1. Na figura abaixo estão representados dois cubos $[ABCDEFHGH]$ e $[EFGHIJKL]$.

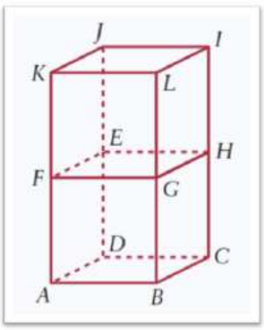


Figura 1

1.1 Completa de modo a obteres afirmações verdadeiras

a) $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{CH} =$

b) $\overrightarrow{JL} + \overrightarrow{AD} =$

c) $\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{IC} =$

d) $\overrightarrow{KG} + 2\overrightarrow{EJ} =$

e) $\overrightarrow{IC} - 2\overrightarrow{KF} =$

f) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{DJ} =$

Dificuldades dos alunos	Questões orientadoras
▪ Identificar representantes do mesmo vetor de forma a conseguirem aplicar as regras. ▪ Não conseguir visualizar um representante do vetor $2\overrightarrow{EJ}$ e/ou do	▪ O que está escrito no enunciado acerca da figura? O facto de serem cubos, permite teres alguma informação acerca dos vetores representados? Por exemplo, o vetor $\overrightarrow{FG}$ e o vetor $\overrightarrow{KL}$, existe alguma relação entre eles?

vetor -2$\overrightarrow{KF}$, cujo escalar a multiplicar pelo vetor seja igual a um.	▪ Observa, por exemplo, o vetor $\overrightarrow{AF}$ e o vetor $\overrightarrow{BL}$, detetas alguma diferença? Dizes o comprimento, e consegues saber quanto será essa diferença de comprimento? Então, se olhares agora para o vetor $\overrightarrow{EJ}$, consegues dizer-me um vetor que seja o dobro desse? Agora, o vetor $\overrightarrow{KF}$, qual será o efeito no vetor ao multiplicarmos ele por “menos dois”?

➢ **MOMENTO V (10:30 -10:40)**

A correção deste exercício inicia-se com o professor a questionar os alunos acerca das respostas obtidas. Para cada alínea, deverá ser representado no quadro e identificado na própria figura, todos os vetores utilizados durante os cálculos intermédios.

Algumas questões a serem colocadas pelo professor:

- Qual a regra mais simples de aplicar nesta alínea?
- Atendendo à vossa resposta, como aplicaram a regra?
- Se aplicasse a outra regra, como seria?
- Um dos vossos colegas escolheu, por exemplo, o vetor $\overrightarrow{FL}$ em vez do vetor $\overrightarrow{EI}$, qual a diferença?
- (Antes da correção da alínea d.) Qual a diferença entre o vetor $\overrightarrow{EJ}$ e o vetor 2$\overrightarrow{EJ}$? E entre o vetor $\overrightarrow{EJ}$ e o vetor -2$\overrightarrow{EJ}$? E entre o vetor 2$\overrightarrow{EJ}$ e o vetor -2$\overrightarrow{EJ}$?
- Na última alínea, podia começar por somar o vetor $\overrightarrow{GH}$ com o vetor $\overrightarrow{DJ}$ e só depois então somar ao vetor $\overrightarrow{AB}$?

➢ **MOMENTO VI (10:40-10:50)**

Neste momento, será apresentado um exercício no *PowerPoint* que deve ser resolvido em grupo-turma.

Exercício 2:

Na figura 2, está representado um paralelepípedo com $5cm$ de comprimento, $2cm$ de largura e $3cm$ de altura, fixado num referencial $o.n\, Oxyz$. Determina as coordenadas do vetor $\vec{v}$.

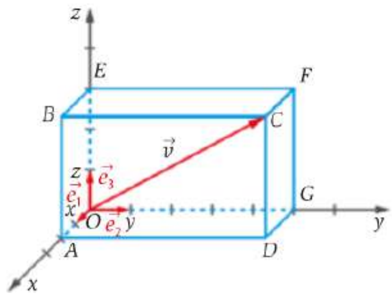


Figura 2

Neste exercício é importante destacar a relação entre as dimensões do paralelepípedo e as coordenadas do vetor, e explicar aos alunos que fixado um referencial ortonormado do espaço, sendo $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{OY}$ e $\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{OZ}$, para qualquer vetor $\vec{v}$, existe um, e um único, terno ordenado (v_1, v_2, v_3), designado por coordenadas de $\vec{v}$, tal que: $\vec{v} = v_1\overrightarrow{e_1}+ v_2\overrightarrow{e_2} + v_3\overrightarrow{e_3}$. Assim, neste exercício, tem-se que:

$$\vec{v} = 2\overrightarrow{e_1}+ 5\overrightarrow{e_2} + 5\overrightarrow{e_3}$$

e o terno (2,5,3) é único.

➢ **MOMENTO VII (10:50 -11:00)**

Neste momento será apresentado uma síntese de todas as propriedades que os alunos já conhecem sobre operações com coordenadas de vetores no plano, enquanto se estabelecesse uma correspondência para vetores no espaço.

- **MOMENTO VIII (11:00 -11:15)**

Este momento será para os alunos resolverem três exercícios do manual.

No primeiro exercício, para a alínea 1.1, pretende-se que os alunos apliquem pelo menos duas das seguintes operações:

- Diferença de dois pontos;
- Soma de um ponto com um vetor;
- Soma e diferença de vetores

Na alínea 1.2, os alunos devem determinar a norma de três vetores, podendo utilizar a relação entre as dimensões do paralelepípedo e as coordenadas calculadas anteriormente, ou aplicando a fórmula da norma de um vetor.

1. Na figura seguinte está representado, num referencial ortonormado do espaço, um paralelepípedo.

Sabe-se que:
- A face $[OABC]$ está contida no plano xOy;
- A face $[OAEF]$ está contida no plano xOz;
- A face $[OCDE]$ está contida no plano yOz;
- O vértice G tem coordenadas $(5,6,2)$.

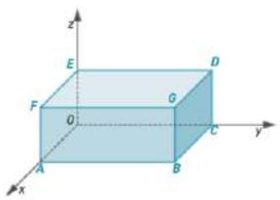


Figura 3

1.1 Determina as coordenadas dos vetores:

$a)\ \overrightarrow{OA}$ $c)\ \overrightarrow{OC}$ $e)\ \overrightarrow{BE}$

$b)\ \overrightarrow{OB}$ $d)\ \overrightarrow{OD}$ $d)\ \overrightarrow{CA}$

1.2 Determina:

$a)\ \|\overrightarrow{OA}\|$

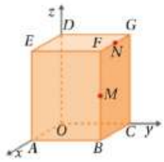
$b)\ \|\overrightarrow{OE}\|$

$c)\ \|\overrightarrow{CA}\|$

Dificuldades dos alunos	Questões orientadoras
▪ Não compreender a relação entre as coordenadas dos pontos e o plano onde estão contidos. ▪ Não compreender a relação entre as coordenadas do ponto G e as coordenadas dos outros pontos.	▪ No enunciado é dito que a face $[OABC]$ está contida no plano xOy, o que isso significa? Consegues extrair alguma informação sobre os pontos O, A, B e C a partir do facto de estarem contidos no plano xOy? ▪ Quais são as coordenadas do ponto G? Isso mesmo, agora qual achas que será a relação entre as coordenadas do ponto G e do ponto B? Será alguma alteração no valor da abcissa? Na ordenada? Na cota?

No segundo exercício pretende-se que os alunos, além de aplicarem as operações mencionadas no primeiro exercício, que também pratiquem operações envolvendo o produto de número real por um vetor e que façam uso das regras geométricas como forma de facilitar os cálculos.

7. Na figura está representado, num referencial ortonormado do espaço, o paralelepípedo retângulo $[OABCDEFG]$.



Sabe-se que:

- os vértices A, C e D pertencem aos semieixos positivos Ox, Oy e Oz, respetivamente;
- M e N são os pontos médios das arestas $[BF]$ e $[FG]$, respetivamente;
- o ponto F tem coordenadas $(2, 3, 4)$.

Escreva as coordenadas dos vetores:

7.1. $\overrightarrow{OA}$ **7.2.** $\overrightarrow{OB}$

7.3. $\overrightarrow{OC}$ **7.4.** $\overrightarrow{OD}$

7.5. $\overrightarrow{OE}$ **7.6.** $\overrightarrow{OF}$

7.7. $\overrightarrow{AF}$ **7.8.** $\overrightarrow{CF}$

7.9. $\overrightarrow{DF}$

7.10. $\overrightarrow{CF} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{GC}$

7.11. $\overrightarrow{DF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{MG}$

7.12. $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{GN}$

7.13. $2\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{EF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

7.14. $\frac{1}{2}\overrightarrow{EA} - 2\overrightarrow{FN} + \overrightarrow{AF}$

Dificuldades dos alunos	Questões orientadoras
▪ Não compreender a relação entre as coordenadas dos pontos A, C e D e os eixos onde estão contidos. ▪ Não conseguir calcular as coordenadas do ponto M ou N. ▪ Não compreender a relação entre as coordenadas do ponto F e as coordenadas dos outros pontos. ▪ Dificuldade em visualizar e/ou determinar as coordenadas do vetor $\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$, ou $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.	▪ Diz-me as coordenadas de um ponto que pertença ao eixo Ox, agora outro ponto, e mais outro ponto, o que esses três pontos têm em comum? Então o facto do ponto A pertencer ao eixo Ox quer dizer o quê? ▪ O que significa o ponto M ser ponto médio da aresta $[BF]$? Então, tens as coordenadas de B e as coordenadas de F, quais têm que ser as coordenadas de M para ser ponto médio dessa aresta? ▪ Quais são as coordenadas do ponto F? Isso mesmo, agora qual achas que será a relação entre as coordenadas do ponto F e do ponto B? Será alguma alteração no valor da abcissa? Na ordenada? Na cota? ▪ Durante a aula, conseguiste perceber qual a diferença entre, por exemplo, o vetor $\vec{u}$ e o vetor $2\vec{u}$? Exatamente, o vetor $2\vec{u}$ tem o dobro do comprimento, então e se tivéssemos o vetor $\frac{1}{2}\vec{u}$, qual a sua relação para com o vetor $\vec{u}$? Consegues agora aplicar os mesmos princípios nos vetores do exercício?

No terceiro exercício pretende-se que os alunos consigam manipular expressões algébricas com as coordenadas de vetores no espaço, utilizando os seus conhecimentos acerca de igualdade de vetores e norma de um vetor.

9. Considere, fixado um referencial ortonormado do espaço, os vetores $\vec{u}(1, a, 2)$ e $\vec{v}(b-1, 2, 4)$; $a, b \in \mathbb{R}$.

9.1. Determine a e b tal que:

$$\vec{v} = 2\vec{u}$$

9.2. Determine a tal que:

$$\|\vec{u}\| = 3$$

9.3. Determine a e b tal que:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| = 6$$

Alínea	Dificuldades dos alunos	Questões orientadoras
1.	▪ Não lembrar quando é que dois vetores são considerados iguais.	▪ Se eu tiver, por exemplo, o vetor $\vec{a}(1,1,1)$ e o vetor $\vec{b}(1,2,3)$, achas que são iguais? Não? Por quê? E se tiver o vetor $\vec{c}(-1,-1,-1)$, este já igual ao vetor $\vec{a}$? Não? Então como teriam que ser as coordenadas do vetor $\vec{c}$ para ser considerado igual ao vetor $\vec{a}$?
2.	▪ Não lembrar que pode elevar ambos os membros ao quadrado, para resolver a equação.	▪ Qual o número, cuja raiz é 3? E na tua equação, o qual terá que ser o valor dessa incógnita, sabendo que a raiz é 3?
3.	▪ Não perceber como deve somar coordenadas de vetores envolvendo incógnitas.	▪ Se tiveres os vetores $\vec{a}(1,1,1)$ e $\vec{b}(1,2,3)$, e os quiseres somar, como fica? E se for o vetor $\vec{c}(a,1,1)$ e $\vec{b}(1,2,3)$, como será a abcissa do vetor soma?

- **MOMENTO IX (11:15 -11:30)**

A correção do primeiro e do segundo exercício inicia-se com o professor a questionar os alunos acerca das estratégias utilizadas, caso algum tipo de operação não tenha sido usada, o professor deverá questioná-los se existe algum outro método de resolução, no intuito de que se recordem de todas as operações estudadas em aula. No segundo exercício, é relevante destacar a diferença, quanto à eficiência, entre utilizar as regras geométricas ou aplicar sucessivamente operações como a diferença entre dois pontos e a soma de coordenadas de vetores.

No terceiro exercício o professor deverá fazer as seguintes questões:

- Quando dois vetores são iguais?
- A equação $\sqrt{1^2 + a^2 + 2^2} = 3$ é ou não equivalente à equação $5 + a^2 = 9$?
- Na 9.3, tenho que somar primeiro os dois vetores e depois aplicar a fórmula da norma, ou posso utilizar a fórmula individualmente para cada um dos vetores e em seguida, somar?

Anexo 02: Plano de Trabalho – Aula 09-02-2023

<table>
<tr><th colspan="2">PLANO DE AULA</th></tr>
<tr><td>ESCOLA SECUNDÁRIA Rainha Dona Leonor
Matemática 10º Ano
09 fevereiro 2023
Hora: 13:30h às 15:00h</td><td>Domínio/Unidade didática: Cálculo Vetorial no Espaço

SUMÁRIO:

▪ Colinearidade de vetores. Resolução e Discussão da ficha de trabalho A.</td></tr>
<tr><th colspan="2">TÓPICOS</th></tr>
<tr><td colspan="2">▪ Colinearidade de vetores
▪ Norma de um vetor
▪ Adição de vetores</td></tr>
<tr><th colspan="2">OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM</th></tr>
<tr><th>GERAL</th><th>ESPECÍFICOS</th></tr>
<tr><td>▪ Reconhecer, analisar e operar com coordenadas de vetores no espaço.</td><td>▪ Formular e testar generalizações.
▪ Justificar e interpretar resultados.
▪ Reconhecer a relação entre coordenadas de vetores colineares.
▪ Manipular expressões algébricas para o cálculo de coordenadas de vetores.</td></tr>
<tr><th colspan="2">CAPACIDADES TRANSVERSAIS</th></tr>
<tr><td colspan="2">▪ Comunicação Matemática – Comunicar usando diversas formas de representação (Visual, Simbólica e Verbal).
▪ Raciocínio Matemático.</td></tr>
<tr><th colspan="2">CONHECIMENTOS PRÉVIOS</th></tr>
<tr><td colspan="2">▪ Definições e propriedades de vetores no espaço.
▪ Manipulação de expressões algébricas (7º e 8º ano).
▪ Planos e eixos coordenados.</td></tr>
<tr><th colspan="2">RECURSOS</th></tr>
<tr><th>Professor</th><th>Alunos</th></tr>
<tr><td>▪ PowerPoint
▪ Ficha de trabalho
▪ Quadro branco</td><td>▪ Ficha de trabalho A
▪ Caderno</td></tr>
<tr><th colspan="2">METODOLOGIA DE TRABALHO</th></tr>
<tr><td colspan="2">▪ Trabalho em grupos de dois a três alunos.
▪ Discussão das resoluções da ficha, em grupo-turma.</td></tr>
<tr><th colspan="2">AVALIAÇÃO</th></tr>
<tr><td colspan="2">▪ Avaliação formativa: No decorrer do trabalho autónomo, usando a observação como instrumento de avaliação, o professor deve averiguar a participação e o interesse do</td></tr>
</table>

aluno. No momento de discussão coletiva, o professor deve avaliar a participação e a capacidade do aluno em exprimir as suas ideias, escrita e oralmente, verificando o rigor matemático.

DESENVOLVIMENTO DA AULA

A aula será dividida em cinco momentos, correspondendo respetivamente a:

- Entrada inicial dos alunos (5 minutos);
- Revisão da definição e propriedades de vetores colineares e resolução em grupo-turma de dois exemplos (15 minutos);
- Apresentação da ficha de trabalho (10 minutos);
- Resolução autónoma da ficha de trabalho A (40 minutos);
- Discussão coletiva da primeira questão da ficha A (20 minutos).

➢ MOMENTO I (13:30-13:35)

Este momento terá início com a entrada inicial dos alunos.

➢ MOMENTO II (13:35-13:50)

Este momento será dedicado à revisão da definição e propriedades de vetores colineares no plano, e à extensão dos respetivos critérios ao espaço. Em seguida, serão resolvidos em grupo-turma dois exemplos sobre como verificar se dois vetores são colineares.

Exemplo 1:

- Verifique se os vetores $\vec{u}\left(-2,\ 3,\ 0\right)$ e $\vec{v}(4,\ 6,\ 0)$ são colineares

$$\vec{u} = \lambda\vec{v} \Leftrightarrow \left(-2,\ 3\ 0\right) = \lambda\left(-4,\ 6,\ 0\right) \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = -4\lambda \\ 3 = 6\lambda \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} \\ \lambda = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Como $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v}$, então $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares.

Exemplo 2:

- Verifique se os vetores $\vec{c}\left(2,\ -2,\ 6\ \right)$ e $\vec{d}(-1,\ 1,\ 3)$ são colineares.

$$\frac{2}{-1} = \frac{-2}{1} = -2 \neq \frac{6}{3} = 2$$

Logo, os vetores $\vec{c}$ e $\vec{d}$ não são colineares.

No final da resolução de cada um dos exemplos o professor deve perguntar se os vetores em questão têm ou não o mesmo sentido.

➢ MOMENTO III (13:50-14:00)

Este momento terá início com uma breve introdução à ficha de trabalho. Prevê-se uma primeira explicação do enunciado da questão 1:

- A questão diz respeito à norma de vetores e sua relação com a colinearidade de vetores;

- Os alunos devem identificar os casos em que a condição presente no enunciado se verifica, para isso será necessário que formulem hipóteses baseadas nas particularidades associadas à colineriedade na adição de vetores e escolham, apresentando uma justificação, as que respeitam a condição dada.

Em seguida é explicado o que se pretende da questão 2:

- Nesta questão está presente quatro pares de vetores. Pretende-se que os alunos, para cada par de vetores, verifiquem os que são colineares, e em caso afirmativo, indiquem, justificando, se têm o mesmo sentido.

Depois, o professor explica o que é pedido na última questão da ficha:

- Na figura está representado um cubo. Pretende-se que os alunos, pela observação da figura e pelas informações adicionais no enunciado, determinem as coordenadas do ponto H.
- Em seguida, o aluno deve interpretar o resultado e justificar a veracidade da afirmação presente no enunciado.

Concluindo, os alunos devem ser informados de que dispõem de 40 minutos para resolverem a tarefa em grupo de dois a três alunos.

Atividade do aluno (e possíveis dificuldades)	**Atividade do Professor** (e estratégias para lidar com possíveis dificuldades dos alunos)
▪ Os alunos podem colocar dúvidas sobre o enunciado das questões, quer em termos de linguagem, quer em termos do que é dado e do que é pedido.	▪ Explicar o que será feito e o modo como vai decorrer a aula; ▪ Distribuição do enunciado da tarefa a realizar, indicando que deve ser feita a pares; ▪ Ler o enunciado e anunciar o início do período de trabalho.

- **MOMENTO IV (14:00-14:40)**

Durante a realização da tarefa, o professor circula pela sala a fim de:

- Apoiar os alunos, através do questionamento, em eventuais dificuldades inerentes à resolução da tarefa;
- Observar as diferentes respostas dadas pelos alunos a fim de ordená-las da forma mais apropriada para o momento seguinte.

Questão/ Momento	**Atividade do Aluno**	**Atividade do professor**

1.	**Dificuldades**	**Questões orientadoras**
	▪ O aluno não consegue compreender como deve iniciar a resolução da questão. ▪ O aluno verifica o caso de os vetores serem colineares com o mesmo sentido, mas não analisa o caso dos vetores serem colineares com sentidos opostos ou vice-versa. ▪ O aluno não verifica o caso de pelo menos um dos vetores serem nulos. ▪ O aluno não verifica o caso de os vetores serem não colineares. ▪ O aluno tem dúvidas acerca da forma como deve justificar que a igualdade não é válida para vetores colineares com sentidos opostos e para vetores não colineares. ▪ O aluno justifica que a igualdade se verifica para vetores colineares com o mesmo sentido ou na soma de pelo menos um vetor nulo, mas apenas com base em alguns exemplos.	▪ Diz-me, por palavras tuas, o que é pedido na questão. Tu queres descobrir em que casos essa igualdade se verifica, essa igualdade representa o quê? Repara que tens no enunciado um exercício que resolvemos ontem, o que falamos acerca desse exercício? Recordas qual era a relação entre esses vetores? ▪ Já verificaste a condição para vetores colineares com o mesmo sentido, mas quando se soma dois vetores colineares, essa é a única hipótese? ▪ Imagina que em vez de vetores, eram números reais, em que condições a igualdade se verificava? Então, nos números reais o elemento neutro da adição é um caso a considerar, e aqui nos vetores, o que achas? ▪ No enunciado é apresentado um exemplo onde a igualdade não se verifica, encontras alguma razão para isso? ▪ Esses exemplos que calculaste significam o quê? Agora lê o que pede a questão. Então para justificares que nessas condições a igualdade não se verifica, basta um exemplo ou tens que provar que para quaisquer vetores nessas condições a igualdade não se verifica? ▪ Tu dizes que a igualdade vai se verificar sempre que somarmos vetores nessas condições, certo? E como justificaste isso? Apresentaste alguns exemplos onde a igualdade se verifica, mas tu dizes que a igualdade se verifica sempre, como posso ter a certeza que para outros vetores além dos que calculaste, também se verifica?
2.	▪ Os alunos não conseguem verificar se dois vetores são	▪ Tenta recordar-te do que falamos no inico da aula, o que significa dois

	colineares. ▪ Os alunos não conseguem verificar e/ou justificar algebricamente se dois vetores colineares têm ou não o mesmo sentido.	vetores serem colineares? Qual foi a propriedade que utilizamos para mostrar algebricamente que dois vetores eram colineares? ▪ Quando aplicamos a propriedade $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ para verificar se os dois vetores eram colineares, qual era a influencia do valor de "λ"?
3.	▪ Os alunos não sabem como determinar as coordenadas do ponto H. ▪ Os alunos não sabem como justificar se as coordenadas do ponto H pertencem a um dos eixos coordenados.	▪ Qual a diferença entre o vetor $\overrightarrow{DA}$ e o vetor $\overrightarrow{CB}$? Se eu escolher agora o vetor $\overrightarrow{DH}$ consegues dizer-me um vetor que seja igual a esse? Consegues agora calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{DH}$? Sabendo as coordenadas do vetor $\overrightarrow{DH}$ e as coordenadas do ponto D, como se determina as coordenadas do ponto H? ▪ Diz-me exemplos de coordenadas de pontos que pertencem a um dos eixos coordenados. E como tens a certeza que esse ponto pertence a um dos eixos coordenados? Então, olhando agora para as coordenadas do ponto H, também ocorre aquilo que referiste?

- **MOMENTO V (14:40-15:00)**

Na fase de discussão coletiva, o professor terá um papel como moderador.

O docente deverá ordenar a apresentação das resoluções dos alunos, e incentivar os alunos a explicarem o seu raciocínio, a avaliar as respostas dos seus colegas, e a identificarem erros na sua própria resolução.

A ordem como as resoluções devem ser expostas dependerá do tipo de representação utilizada e a sua eficácia, dos erros cometidos, e da justificação.

Na primeira questão vou começar, se existir, pelos grupos que tenham utilizado uma representação verbal e/ou visual, para os alunos começarem a refletir com maior facilidade em que condições a igualdade se verifica, ao menos tempo que os questiono sobre a forma como justificaram. No final, devem compreender que para esta questão há hipóteses que não podem ser refutadas e/ou generalizadas sem recorrer à simbologia, e devem conseguir identificar a relação entre as várias representações.

Anexo 03: Plano de Trabalho – Aula 13-02-2023

<table>
<tr><th colspan="2">PLANO DE AULA</th></tr>
<tr><td>ESCOLA SECUNDÁRIA Rainha Dona Leonor
Matemática 10º Ano
13 fevereiro 2023
Hora: 17:00h às 18:30h</td><td>Domínio/Unidade didática: Cálculo Vetorial no Espaço

SUMÁRIO:

▪ Discussão coletiva da ficha de trabalho A. Resolução da ficha de trabalho B.</td></tr>
<tr><th colspan="2">TÓPICOS</th></tr>
<tr><td colspan="2">▪ Colinearidade de vetores
▪ Norma de um vetor
▪ Manipulação de expressões algébricas</td></tr>
<tr><th colspan="2">OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM</th></tr>
<tr><th>GERAL</th><th>ESPECÍFICOS</th></tr>
<tr><td>▪ Reconhecer, analisar e operar com coordenadas de vetores no espaço.
▪ Aplicar conceitos e propriedades geométricas e algébricas de vetores na resolução de problemas.</td><td>▪ Formular e testar generalizações.
▪ Justificar e interpretar resultados.
▪ Reconhecer a relação entre coordenadas de vetores colineares.
▪ Manipular expressões algébricas para o cálculo de coordenadas de vetores.</td></tr>
<tr><th colspan="2">CAPACIDADES TRANSVERSAIS</th></tr>
<tr><td colspan="2">▪ Comunicação Matemática – Comunicar usando diversas formas de representação (Visual, Simbólica e Verbal).
▪ Raciocínio Matemático.
▪ Resolução de problemas.</td></tr>
<tr><th colspan="2">CONHECIMENTOS PRÉVIOS</th></tr>
<tr><td colspan="2">▪ Definições e propriedades de vetores no espaço.
▪ Manipulação de expressões algébricas (7º e 8º ano).
▪ Volume de sólidos geométricos (8º ano).</td></tr>
<tr><th colspan="2">RECURSOS</th></tr>
<tr><th>Professor</th><th>Alunos</th></tr>
<tr><td>▪ PowerPoint
▪ Ficha de trabalho A e B.
▪ Quadro branco</td><td>▪ Ficha de trabalho A e B.
▪ Caderno</td></tr>
<tr><th colspan="2">METODOLOGIA DE TRABALHO</th></tr>
<tr><td colspan="2">▪ Trabalho em grupos de dois a três alunos.
▪ Discussão das resoluções da ficha, em grupo-turma.</td></tr>
<tr><th colspan="2">AVALIAÇÃO</th></tr>
<tr><td colspan="2">▪ Avaliação formativa: No decorrer do trabalho autónomo, usando a observação como instrumento de avaliação, o professor deve averiguar a participação e o interesse do aluno. No momento de discussão coletiva, o professor deve avaliar a</td></tr>
</table>

participação e a capacidade do aluno em exprimir as suas ideias, escrita e oralmente, verificando o rigor matemático.

DESENVOLVIMENTO DA AULA

A aula será dividida em cinco momentos, correspondendo respetivamente a:

- Entrada inicial dos alunos (5 minutos);
- Discussão coletiva da ficha de trabalho A (40 minutos);
- Sistematização das aprendizagens (10 minutos);
- Apresentação da ficha de trabalho B (5 minutos);
- Resolução autónoma da ficha de trabalho B (30 minutos);

➢ MOMENTO I (17:00-17:05)

Este momento terá início com a entrada inicial dos alunos.

➢ MOMENTO II (17:05-17:45)

Na fase de discussão coletiva, o professor terá um papel como moderador.

O docente deverá ordenar a apresentação das resoluções dos alunos, e incentivar os alunos a explicarem o seu raciocínio, a avaliar as respostas dos seus colegas, e a identificarem erros na sua própria resolução.

A ordem como as resoluções devem ser expostas dependerá do tipo de representação utilizada e a sua eficácia, dos erros cometidos, e da justificação.

Na primeira questão vou começar, se existir, pelos grupos que tenham utilizado uma representação verbal e/ou visual, para os alunos começarem a refletir com maior facilidade em que condições a igualdade se verifica, ao menos tempo que os questiono sobre a forma como justificaram. No final, devem compreender que para esta questão há hipóteses que não podem ser refutadas e/ou generalizadas sem recorrer à simbologia, e devem conseguir identificar a relação entre as várias representações.

Na segunda questão e terceira questão, vou começar pelos grupos que tenham apresentado uma justificação incompleta e/ou tenham tido maiores dificuldades durante a resolução. Ao final, os alunos devem perceber os erros cometidos e apresentar uma justificação completa.

➢ MOMENTO III (17:45-17:55)

Durante a sistematização, deve relembrar a turma os conceitos e procedimentos matemáticos envolvidos e estabelecer conexões com aprendizagens anteriores.

- Podemos verificar que dois vetores são colineares se, e só se, existe um único λ, tal que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ ou no caso de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ serem vetores de coordenadas não nulas, os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares se e só se as coordenadas dos vetores forem diretamente proporcionais, ou seja, $\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3}$.
- A correspondência entre as coordenadas de um ponto e o eixo coordenado a que ele pertence.
- A relação entre a adição de vetores e a sua colineridade.

Com a ajuda do professor a turma também deve reconhecer que há diversas maneiras de justificar uma resposta, porem é necessário avaliar a validade dessa justificação.

- **MOMENTO IV (17:55-18:00)**

Este momento terá início com uma breve introdução à ficha de trabalho. Prevê-se uma explicação do enunciado das alíneas da questão 1:

- A questão diz respeito a uma pirâmide quadrangular regular, cujas as medidas dos lados da base são desconhecidas.
- Os alunos, na primeira alínea, devem calcular as coordenadas dos pontos F e G e do vetor $\overrightarrow{VH}$, recorrendo às coordenadas dos vetores enunciados e à interpretação da figura.
- Na segunda alínea, pretende-se que os alunos, através da manipulação algébrica e das informações enunciadas, justifiquem como determinaram o volume do tronco da pirâmide e indiquem o valor lógico da afirmação proposta.

Concluindo, os alunos devem ser informados de que dispõem de 30 minutos para resolverem a tarefa com os grupos formados na aula anterior.

Atividade do aluno (e possíveis dificuldades)	**Atividade do Professor** (e estratégias para lidar com possíveis dificuldades dos alunos)
▪ Os alunos podem colocar dúvidas sobre o enunciado das questões, quer em termos de linguagem, quer em termos do que é dado e do que é pedido.	▪ Explicar o que será feito e o modo como vai decorrer a aula; ▪ Distribuição do enunciado da tarefa a realizar, indicando que deve ser feita a pares; ▪ Ler o enunciado e anunciar o início do período de trabalho.

- **MOMENTO IV (14:00-14:40)**

Durante a realização da tarefa, o professor circula pela sala a fim de:

- Apoiar os alunos, através do questionamento, em eventuais dificuldades inerentes à resolução da tarefa;
- Observar as diferentes respostas dadas pelos alunos a fim de ordená-las da forma mais apropriada para o momento seguinte.

Questão/ Momento	**Atividade do Aluno**	**Atividade do professor**
1. **1.1.**	**<u>Dificuldades</u>** ▪ O aluno não consegue compreender a relação entre as arestas da pirâmide e os	**<u>Questões orientadoras</u>** ▪ Se em vez da pirâmide, tivéssemos um cubo, como seria a relação? Muito bem, agora repara no vetor $\overrightarrow{VE}$

	vetores. ▪ O aluno não consegue determinar as coordenadas do vértice F e G. ▪ O aluno não consegue determinar as coordenadas ▪ do vetor $\overrightarrow{VH}$.	e no vetor $\overrightarrow{VG}$, são iguais esses vetores? Essa diferença se deve ao quê? ▪ Quais foram os métodos que até agora utilizamos para calcular as coordenadas de um ponto? Consegues aplicar diretamente algum desses métodos? ▪ Quais foram os métodos que até agora utilizamos para calcular as coordenadas de um vetor? Consegues aplicar diretamente algum desses métodos?
1.2.	▪ Os alunos não se recordam como se calcula o volume do tronco da pirâmide. ▪ Os alunos não se recordam da relação entre a altura da pirâmide e o facto de esta ser regular. ▪ O aluno não consegue determinar as coordenadas do ponto O. ▪ Os alunos não conseguem determinar a área da base da pirâmide $[ABCDV]$. ▪ Os alunos não conseguem determinar a área da base da pirâmide $[EFGHV]$	▪ A pirâmide $[ABCDV]$ é constituída pelo tronco de pirâmide e mais o quê? Então a relação entre o volume do tronco, e essas duas pirâmides é qual? ▪ O que é uma pirâmide obliqua? O que é uma pirâmide reta? No enunciado é dito que a pirâmide é regular, se é regular significa que ela pode ser obliqua ou reta, ou só uma das duas? ▪ Sabes que como a pirâmide é regular, a altura da pirâmide corresponderá à distância do vértice V ao centro da base $[ABCD]$. E quais são os dados que temos? Temos as coordenadas do vértice V e o comprimento da distância, então como se calculas as coordenadas do ponto O? ▪ Quais os pontos da base que já conheces as suas coordenadas? O ponto O e R, exatamente. Para determinares a área da base precisamos de saber o quê? Queres determinar o comprimento dos lados do base, e qual a relação entre O e R, e esse comprimento? ▪ Que polígono é a base $[EFGH]$? Se é um quadrado, basta saber o quê?

Anexo 04: Plano de Trabalho – Aula 15-02-2023

PLANO DE AULA	
ESCOLA SECUNDÁRIA Rainha Dona Leonor Matemática 10º Ano 15 fevereiro 2023 Hora: 10:00h às 11:30h	**Domínio/Unidade didática: Cálculo Vetorial no Espaço** **SUMÁRIO:** ▪ Discussão coletiva da ficha de trabalho B. Equação vetorial de uma reta no espaço.
TÓPICOS	
▪ Vetor diretor de uma reta ▪ Equação vetorial de uma reta ▪ Sistema de equações paramétricas	
OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM	
GERAL	**ESPECÍFICOS**
▪ Estender as definições e propriedades das equações vetoriais de retas no plano ao espaço. ▪ Reconhecer, analisar e aplicar na resolução de exercícios a equação vetorial de uma reta no espaço.	▪ Justificar e interpretar resultados. ▪ Manipular expressões algébricas de forma a compreender as características da reta.
CAPACIDADES TRANSVERSAIS	
▪ Comunicação Matemática – Comunicar usando diversas formas de representação (Visual, Simbólica e Verbal). ▪ Raciocínio Matemático.	
CONHECIMENTOS PRÉVIOS	
▪ Equação vetorial de uma reta e sistemas de equações paramétricas no plano. ▪ Definições e propriedades de vetores no espaço. ▪ Manipulação de expressões algébricas (7º e 8º ano).	
RECURSOS	
Professor	**Alunos**
▪ *PowerPoint* ▪ Ficha de trabalho B ▪ Quadro branco	▪ Ficha de trabalho B
METODOLOGIA DE TRABALHO	
▪ Discussão coletiva das resoluções da ficha. ▪ Trabalho em grupo-turma durante a revisão de conteúdos. ▪ Trabalho autónoma durante a realização de exercícios do manual.	

AVALIAÇÃO

- Avaliação formativa: No decorrer do trabalho autónomo, usando a observação como instrumento de avaliação, o professor deve averiguar a participação e o interesse do aluno. No momento da revisão de conteúdos e da discussão das resoluções da ficha e dos exercícios, o professor deve avaliar a participação e a capacidade do aluno em exprimir as suas ideias, escrita e oralmente, verificando o rigor matemático.

DESENVOLVIMENTO DA AULA

A aula será dividida em cinco momentos, correspondendo respetivamente a:

- Entrada inicial dos alunos (5 minutos);
- Discussão coletiva da ficha de trabalho B (25 minutos);
- Revisão de conteúdos sobre o vetor diretor, equação vetorial e sistema de equações paramétricas de uma reta no plano e respetiva extensão ao espaço (20 minutos);
- Apresentação e resolução de um exercício, em turma, sobre como escrever e determinar a equação vetorial de uma reta e de um segmento de reta no espaço (20 minutos);
- Apresentação e resolução de um exercício, em turma, sobre como aplicar o sistema de equações paramétricas de uma reta no espaço (20 minutos).

➢ MOMENTO I (10:00 -10:05)

Este momento terá início com a entrada inicial dos alunos.

➢ MOMENTO II (10:05 -10:30)

Na fase de discussão coletiva, o professor terá um papel como moderador.

O docente deverá ordenar a apresentação das resoluções dos alunos, e incentivar os alunos a explicarem o seu raciocínio, a avaliar as respostas dos seus colegas, e a identificarem erros na sua própria resolução.

A ordem como as resoluções devem ser expostas dependerá do tipo de representação utilizada e a sua eficácia, dos erros cometidos, da justificação apresentada.

Na primeira e segunda questão, vou começar pelos grupos que tenham apresentado uma justificação incompleta e/ou tenham tido maiores dificuldades durante a resolução. Adicionalmente, na segunda questão, vou dar prioridade, se existir, aos grupos que tenham utilizado representações visuais, no intuito de auxiliar os alunos durante a visualização da figura. Se não existir, ou caso considere extremamente necessário, vou utilizar um *applet* em *Geogebra* com uma representação da figura do enunciado.

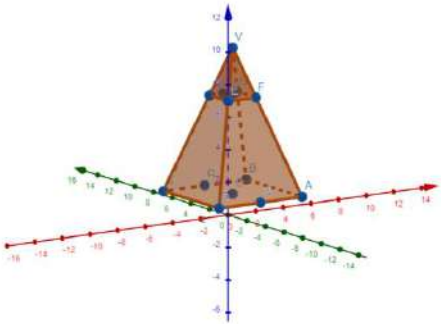


Figura 1.

Ao final, os alunos devem perceber os erros cometidos e apresentar uma justificação completa.

- **MOMENTO III (10:30 -10:50)**

Inicialmente, serão realizadas revisões sobre o vetor diretor, equação vetorial e sistemas de equações paramétricas de uma reta no plano, onde deve ser relembrado:

- A definição e propriedades do vetor diretor de uma reta e respetivas.
- A definição e propriedades da equação vetorial de uma reta no plano.
- A relação entre a equação vetorial de uma reta e o sistema de equações paramétricas.

Em seguida, as definições e propriedades revistas devem ser estendidas ao espaço.

- **MOMENTO IV (10:50 -11:10)**

Neste momento, será apresentado um exercício no *PowerPoint* que deve ser resolvido em grupo-turma.

Exercício 1:

Num referencial $o.n\ Oxyz$, considera os pontos $A(-3,\ 5,\ 1)$ e $\mathrm{B}(1,\ 3,\ -1)$ e o vetor $\vec{v}(3,2,0)$.

a) Escreve uma equação vetorial da reta r que passa em A e tem a direção de $\vec{v}$.
b) Escreve uma equação vetorial da reta AB.
c) Defina vectorialmente o segmento de reta $[AB]$.

Neste exercício é importante destacar que quando se pede uma equação vetorial de uma reta, as coordenadas de um dos pontos da reta e do vetor diretor podem nem sempre aparecerem escritas no enunciado, tal como acontece na alínea b), e é necessário na equação definir sempre o intervalo, para distinguir entre uma reta, segmento de reta ou semirreta.

- **MOMENTO V (11:10 -11:30)**

Neste momento, será apresentado um exercício no *PowerPoint* que deve ser resolvido em grupo-turma.

Exercício 2:

Considera, fixado um referencial ortonormado do espaço, o ponto $\mathrm{C}(2,\ -1,\ 0)$ e o vetor$\vec{u}(1,1,-2)$.
Seja r a reta que passa em C e tem a direção do vetor $\vec{u}$.

a) Escreva o sistema de equações paramétricas da reta r.
b) Justifica que o ponto $\mathrm{D}\left(4,\ 1,\ -4\right)$ pertence à reta r.

Na alínea b) é importante salientar que como se pede para justificar que determinado ponto pertence a uma dada reta, não basta apresentar os cálculos de que "k" é igual a 2 nas três equações, é necessário explicar, em poucas palavras, porque esse facto permite afirmar que o ponto D pertence à reta r, de forma a ter uma justificação completa.

Anexo 05: Plano de Trabalho – Aula 16-02-2023

PLANO DE AULA	
ESCOLA SECUNDÁRIA Rainha Dona Leonor Matemática 10.º Ano 16 fevereiro 2023 Hora: 13:30h às 15:00h	**Domínio/Unidade didática: Cálculo Vetorial no Espaço** **SUMÁRIO:** ▪ Resolução e Discussão coletiva da ficha de trabalho C.
TÓPICOS	
▪ Colinearidade de vetores ▪ Equação vetorial de uma reta ▪ Sistema de equações paramétricas	
OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM	
GERAL	**ESPECÍFICOS**
▪ Reconhecer, analisar e aplicar as definições e propriedades das equações vetoriais de retas e colinearidade de vetores.	▪ Compreender a diferença entre uma reta e um segmento de reta na escrita de uma equação vetorial, e respetivas implicações. ▪ Intersetar uma reta com um eixo coordenado e compreender o significado no contexto do exercício. ▪ Justificar e interpretar resultados. ▪ Exemplificar o método de redução ao absurdo.
CAPACIDADES TRANSVERSAIS	
▪ Comunicação Matemática – Comunicar usando diversas formas de representação (Visual, Simbólica e Verbal). ▪ Raciocínio Matemático.	
CONHECIMENTOS PRÉVIOS	
▪ Definição e propriedades da colinearidade de vetores. ▪ Definição e propriedades da equação vetorial de uma reta. ▪ Manipulação de expressões algébricas (7.º e 8.º ano).	
RECURSOS	
Professor	**Alunos**
▪ *PowerPoint* ▪ Ficha de trabalho C ▪ Quadro branco	▪ Ficha de trabalho C ▪ Caderno
METODOLOGIA DE TRABALHO	
▪ Trabalho em grupos de dois a três alunos. ▪ Discussão das resoluções da ficha em grupo-turma.	

AVALIAÇÃO

- Avaliação formativa: No decorrer do trabalho autónomo, usando a observação como instrumento de avaliação, o professor deve averiguar a participação e o interesse do aluno. No momento de discussão coletiva, o professor deve avaliar a participação e a capacidade do aluno em exprimir as suas ideias, escrita e oralmente, verificando o rigor matemático.

DESENVOLVIMENTO DA AULA

A aula será dividida em quatro momentos, correspondendo respetivamente a:

- Entrada inicial dos alunos (5 minutos);
- Apresentação da ficha de trabalho C (10 minutos);
- Resolução autónoma da ficha de trabalho C (30 minutos);
- Discussão coletiva da ficha de trabalho C (45 minutos).

➢ MOMENTO I (13:30 -13:35)

Este momento terá início com a entrada inicial dos alunos.

➢ MOMENTO II (13:35-13:45)

Este momento terá início com uma breve introdução à ficha de trabalho. Prevê-se uma primeira explicação do enunciado da questão 1:

- Na primeira alínea, os alunos devem confirmar ou negar a afirmação expressa, apresentado a justificação que considerem a mais adequada.
- Na segunda alínea, pretende-se que os alunos definam o segmento de reta enunciado, e compreendam porque razão o ponto P pertence à reta AB, mas não ao segmento de reta $[AB]$.
- Na terceira alínea, os alunos, através da manipulação algébrica e do seu conhecimento sobre coordenadas de eixos coordenados, devem justificar porque a reta AB não interseta o eixo Ox.

Em seguida é explicado o que se pretende da questão 2:

- Nesta questão estão presentes seis afirmações sobre a definição e propriedades da colinearidade de vetores. Pretende-se que os alunos, para cada afirmação, indiquem o seu valor lógico e justifiquem as suas opções.

Concluindo, os alunos devem ser informados de que dispõem de trinta minutos para resolverem a tarefa com os grupos anteriormente formados.

Atividade do aluno (e possíveis dificuldades)	**Atividade do Professor** (e estratégias para lidar com possíveis dificuldades dos alunos)
▪ Os alunos podem colocar dúvidas sobre o enunciado das questões, quer em termos de linguagem, quer em termos do que é dado e do que é pedido.	▪ Explicar o que será feito e o modo como vai decorrer a aula; ▪ Distribuição do enunciado da tarefa a realizar, indicando que deve ser feita a pares; ▪ Ler o enunciado e anunciar o início do período de trabalho.

- **MOMENTO III (13:45-14:15)**

Durante a realização da tarefa, o professor circula pela sala a fim de:

- Apoiar os alunos, através do questionamento, em eventuais dificuldades inerentes à resolução da tarefa;
- Observar as diferentes respostas dadas pelos alunos a fim de ordená-las da forma mais apropriada para o momento seguinte.

Questão/ Momento	**Atividade do Aluno**	**Atividade do professor**
1. **a)**	<u>**Dificuldades**</u> ▪ O aluno afirma que existe uma única equação vetorial que defina a reta enunciada.	<u>**Questões orientadoras**</u> ▪ Consideras que só há uma única equação vetorial que defina essa reta? Então, se em vez de utilizar o vetor $\vec{u}(2,3,5)$, utilizar o vetor de coordenadas $(4,6,10)$? Esse vetor tem a mesma direção de $\vec{u}$?
b)	▪ O aluno define a reta AB, em vez do segmento de reta $[AB]$. ▪ O aluno não compreende porque o ponto P pertence à reta AB e não pertence segmento de reta $[AB]$.	▪ Diz-me, por palavras tuas, a diferença entre uma reta e um segmento de reta. Agora na tua equação achas que escreveste uma reta ou um segmento de reta? ▪ Na equação que utilizaste para definir o segmento de reta, o que significa esse intervalo que determinaste para "k"? E o valor que obtiveste para k, pertence a esse intervalo?

c)	▪ O aluno não sabe como verificar se a reta interseta o eixo Ox.	▪ Diz-me alguns pontos que pertençam ao eixo Ox. Agora, o que todos eles têm em comum? Exato, ordenada e cota igual a 0, e a abissa, que valores pode tomar? Muito bem, então qualquer ponto pertencente ao eixo Ox é de que forma?
2.	▪ Os alunos não se recordam da definição e propriedades de vetores colineares. ▪ Os alunos não compreendem que para vetores terem sentidos opostos eles têm que ter obrigatoriamente a mesma direção. ▪ Os alunos não distinguem ou não compreendem a diferença entre a alínea d) e a alínea e).	▪ Qual é o vetor que já estudamos em aulas anteriores que era colinear com qualquer outro? E o vetor $\overrightarrow{AA}$ é o vetor nulo? ▪ Um vetor fica caracterizado por três características, ainda recordas de quais? Então, para dois vetores serem iguais é necessário o quê? ▪ Dá-me um exemplo, até pode ser um desenho, de vetores com sentidos opostos sem terem a mesma direção. ▪ Na tua perspetiva tanto a alínea d) como a alínea e) querem dizer o mesmo? Então repara, vamos pensar supor o seguinte, se eu tenho uma maça e tu outra maça, então temos quantas maças? Isso, agora o contrareciproco, se temos duas maças, então quer dizer que obrigatoriamente tu tens que ter uma e eu outra? Exato, consegues agora perceber a lógica dessas duas alíneas?

- **MOMENTO IV (14:15-15:00)**

Na fase de discussão coletiva, o professor terá um papel como moderador.

O docente deverá ordenar a apresentação das resoluções dos alunos, e incentivar os alunos a explicarem o seu raciocínio, a avaliar as respostas dos seus colegas, e a identificarem erros na sua própria resolução.

A ordem como as resoluções devem ser expostas dependerá do tipo de representação utilizada e a sua eficácia, dos erros cometidos, e da justificação.

Na primeira e segunda questão, vou começar pelos grupos que tenham apresentado uma justificação incompleta e/ou tenham tido maiores dificuldades durante a resolução. Adicionalmente, na segunda questão, vou dar prioridade, se existir, aos grupos que tenham utilizado representações visuais nas três últimas alíneas, no intuito de auxiliar os alunos a visualizar geometricamente o que está escrito nas afirmações. Se não existir, vou começar por fazer desenhos que corroborem ou não com a afirmação e irei questionar os alunos se o que está desenhado no quadro é uma representação da afirmação, e esse exemplo é suficiente para indicar qual o valor lógico. No fim, na alínea d), se nenhum grupo apresentar uma “justificação por absurdo", irei explicar o método e as desvantagens e vantagens no contexto da questão.

Anexo 06: Plano de Trabalho – Aula 23-02-2023

<table>
<tr><th colspan="2">PLANO DE AULA</th></tr>
<tr><td>ESCOLA SECUNDÁRIA Rainha Dona Leonor
Matemática 10.º Ano
23 fevereiro 2023
Hora: 13:30h às 15:00h</td><td>Domínio/Unidade didática: Cálculo Vetorial no Espaço

SUMÁRIO:

▪ Resolução e Discussão coletiva da ficha de trabalho D.</td></tr>
<tr><th colspan="2">TÓPICOS</th></tr>
<tr><td colspan="2">▪ Colinearidade de vetores
▪ Equação vetorial de uma reta.
▪ Sistema de equações paramétricas.
▪ Superfície esférica.</td></tr>
<tr><th colspan="2">OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM</th></tr>
<tr><th>GERAL</th><th>ESPECÍFICOS</th></tr>
<tr><td>▪ Reconhecer, analisar e aplicar as definições e propriedades das equações vetoriais de retas e colinearidade de vetores no espaço.

▪ Estabelecer conexões entre o cálculo vetorial e a equação reduzida de uma superfície esférica.</td><td>▪ Justificar e interpretar resultados.
▪ Exemplificar o método de redução ao absurdo.
▪ Formular e testar generalizações.
▪ Manipular expressões algébricas de forma a compreender o comportamento de pontos na superfície esférica.</td></tr>
<tr><th colspan="2">CAPACIDADES TRANSVERSAIS</th></tr>
<tr><td colspan="2">▪ Comunicação Matemática – Comunicar usando diversas formas de representação (Visual, Simbólica e Verbal).
▪ Raciocínio Matemático.</td></tr>
<tr><th colspan="2">CONHECIMENTOS PRÉVIOS</th></tr>
<tr><td colspan="2">▪ Definição e propriedades da colinearidade de vetores;
▪ Definição e propriedades da equação vetorial de uma reta;
▪ Equação reduzida de uma superfície esférica;
▪ Propriedades dos radicais;
▪ Manipulação de expressões algébricas (7.º e 8.º ano).</td></tr>
<tr><th colspan="2">RECURSOS</th></tr>
<tr><th>Professor</th><th>Alunos</th></tr>
<tr><td>▪ PowerPoint
▪ Ficha de trabalho D
▪ Quadro branco</td><td>▪ Ficha de trabalho D
▪ Caderno</td></tr>
<tr><th colspan="2">METODOLOGIA DE TRABALHO</th></tr>
<tr><td colspan="2">▪ Trabalho em grupos de dois a três alunos.
▪ Discussão das resoluções da ficha em grupo-turma.</td></tr>
</table>

AVALIAÇÃO

- Avaliação formativa: No decorrer do trabalho autónomo, usando a observação como instrumento de avaliação, o professor deve averiguar a participação e o interesse do aluno. No momento de discussão coletiva, o professor deve avaliar a participação e a capacidade do aluno em exprimir as suas ideias, escrita e oralmente, verificando o rigor matemático.

DESENVOLVIMENTO DA AULA

A aula será dividida em seis momentos, correspondendo respetivamente a:

- Entrada inicial dos alunos (5 minutos);
- Apresentação da ficha de trabalho (5 minutos);
- Resolução autónoma da ficha de trabalho D – Parte I (25 minutos);
- Discussão coletiva da ficha de trabalho D – Parte I (25 minutos);
- Resolução autónoma da ficha de trabalho D – Parte II (15 minutos);
- Discussão coletiva da ficha de trabalho D – Parte II (15 minutos);

➢ **MOMENTO I (13:30 -13:35)**

Este momento terá início com a entrada inicial dos alunos.

➢ **MOMENTO II (13:35-13:40)**

Este momento terá início com uma breve introdução à ficha de trabalho. Prevê-se uma primeira explicação do que se pretende na parte I:

- No enunciado encontram-se quatro resoluções, escritas pelos alunos, em relação à questão 2 alínea d) da ficha de trabalho C.
- Os alunos devem começar por analisar essas resoluções e responder às duas primeiras questões e, em seguida, rever a resolução do seu próprio grupo e comentar se consideram a sua justificação válida e o que poderiam fazer para melhorá-la, caso se aplique.

Em seguida, o professor explica o que é pedido na primeira questão da parte II:

- A questão diz respeito a uma superfície esférica, onde se conhece as coordenadas de um dos seus pontos, e duas expressões matemáticas relativas ao vetor $\vec{u}$ e ao ponto Q.
- Na primeira alínea, com base nas informações escrita no enunciado, pretende-se que os alunos determinem as coordenadas do ponto Q e verifiquem se $[PQ]$ é um diâmetro da superfície esférica S.
- Na segunda alínea, os alunos devem afirmar ou negar a generalização do resultado que obtiveram na alínea anterior.

Depois é explicado o enunciado da segunda questão:

- Uma superfície esférica R e W um ponto que lhe pertence.
- Pretende-se que, através da manipulação algébrica, os alunos devem determinar em que condições o ponto T pertence à superfície esférica R, sabendo que W é um ponto de R e que $T = W - 2\overrightarrow{OW}$.

Atividade do aluno (e possíveis dificuldades)	**Atividade do Professor** (e estratégias para lidar com possíveis dificuldades dos alunos)
▪ Os alunos podem colocar dúvidas sobre o enunciado das questões, quer em termos de linguagem, quer em termos do que é dado e do que é pedido.	▪ Explicar o que será feito e o modo como vai decorrer a aula; ▪ Distribuição do enunciado da tarefa a realizar, indicando que deve ser feita a pares; ▪ Ler o enunciado e anunciar o início do período de trabalho.

- **MOMENTO III (13:40-14:05)**

Durante a realização da tarefa, o professor circula pela sala a fim de:

- Apoiar os alunos, através do questionamento, em eventuais dificuldades inerentes à resolução da tarefa;
- Observar as diferentes respostas dadas pelos alunos a fim de ordená-las da forma mais apropriada para o momento seguinte.

Questão/ Momento	**Atividade do Aluno**	**Atividade do professor**
1.	**<u>Dificuldades</u>** ▪ O aluno afirma que não consegue escolher qual a que apresenta melhor fundamentação.	**<u>Questões orientadoras</u>** ▪ Destas quatro, notas alguma diferença entre elas? Por exemplo, entre a A e B, qual destas consideras que se entende melhor o raciocínio? Porquê?
2.	▪ O aluno não consegue diferençar uma resolução não válida de uma resolução incompleta. ▪ O aluno não consegue escolher entre duas resoluções incompletas qual a que considera a mais incompleta.	▪ Para uma resolução ser incompleta, o que deve acontecer primeiro? Uma resolução pode ser incompleta, se não for válida? ▪ Qual foi a resolução que escolheste como a mais completa/melhor justificação? Porquê? E nas que escolheste como incompletas, o que lhes falta para serem completas? Então nisso que lhes falta, qual a que se encontra mais “distante” da completa?

3.	▪ O aluno não consegue justificar porque considera a sua resolução válida.	▪ Das resoluções dos teus colegas, quais consideraste válida? Porquê? Então se consideras a tua válida também, significa o quê?
4.	▪ O aluno não compreende como deve melhorar a justificação.	▪ Porque consideraste a tua justificação não válida? Então, a partir do que escreveste, qual a primeira modificação para torná-la válida? E agora, achas que já esta completa? Consideras incompleta, por quê? Então o que devemos adicionar?

➢ **MOMENTO IV (14:05-14:30)**

Na fase de discussão coletiva, o professor terá um papel como moderador.

O docente deverá ordenar a apresentação das resoluções dos alunos, e incentivar os alunos a explicarem o seu raciocínio, a avaliar as respostas dos seus colegas, e a identificarem erros na sua própria resolução.

A ordem como as resoluções devem ser expostas dependerá do tipo de representação utilizada e a sua eficácia, dos erros cometidos, e da justificação.

Na parte I, na primeira questão, vou começar pelos grupos que tenham escolhido uma resolução pouco unânime e que não seja a melhor fundamentada, até chegar à com melhor justificação. Caso a resolução mais escolhida seja uma que não considere a melhor fundamentada, vou começar por essa. A segunda questão será eventualmente discutida durante o questionamento em relação à primeira, devido a partilharem tópicos semelhantes.

Algumas questões a serem colocadas pelo professor:

- Se eu tiver dois vetores e a origem de um coincidir com extremidade de outro, posso dizer que são vetores colineares? Com base na vossa resposta, uma resolução que afirme isso, como a classificariam usando as expressões da questão dois?
- O que quer dizer “o último do vetor $\overrightarrow{AB}$”? E o “primeiro do $\overrightarrow{BC}$”? E vetores estarem “de seguida”? Consideram que estes termos se adequam a uma linguagem matemática?
- Na resolução D, sem ser o próprio grupo, alguém consegue explicar a relação entre vetores colineares e retas paralelas? Então, com base no que disseram, conseguem dizer-me o que significa a conclusão dos vossos colegas, de que neste caso “não é possível que a colinearidade se verifique entre 2 retas paralelas.”?
- Quem considerou a resolução A como válida e por quê?

Após os alunos concluírem a discussão sobre a resolução A, vou salientar que o método utilizado nessa resolução foi a redução ao absurdo e explicar os pressupostos desse método, usando essa resolução como exemplo.

Na discussão a respeito da terceira e quarta questão da parte I, vou selecionar dois grupos que considere que tenham utilizado uma estratégia diferente das resoluções enunciadas ou que se note uma evolução na resolução para que comentem essa diferença.

- **MOMENTO V (14:30-14:45)**

Durante a realização da tarefa, o professor circula pela sala a fim de:

- Apoiar os alunos, através do questionamento, em eventuais dificuldades inerentes à resolução da tarefa;
- Observar as diferentes respostas dadas pelos alunos a fim de ordená-las da forma mais apropriada para o momento seguinte.

Questão/ Momento	Atividade do Aluno	Atividade do professor
1.	**<u>Dificuldades</u>** ▪ Os alunos não compreendem como devem determinar as coordenadas do ponto Q. ▪ Os alunos não sabem como verificar se $[PQ]$ é um diâmetro. ▪ Os alunos não compreendem a relação existente entre o ponto P e Q.	**<u>Questões orientadoras</u>** ▪ No enunciado o que é dito sobre o ponto Q? E o que é dito sobre o vetor $\vec{u}$? Já tens a expressão $Q = P - 2\overrightarrow{OP}$, então para determinar as coordenadas do ponto Q falta saber o quê? ▪ Quando se fala em diâmetro, quais são as principais características que recordas? Por exemplo, qual a relação entre o diâmetro e o raio? Entre diâmetro e o centro da superfície esférica? … Então se uma dessas características não se verificar, quer dizer o quê? ▪ Sabes que $Q = -P$, o que isso significa? Então quaisquer que sejam as coordenadas do ponto P, como serão as coordenadas do ponto Q? Neste contexto, o que isso permite concluir?
2.	▪ Os alunos não sabem manipular a expressão algébrica de forma a compreender que se T é um ponto simétrico de W relativamente à origem, então só existe uma condição onde T pertence à superfície esférica.	▪ Quais as diferenças e as semelhanças entre esta questão e a anterior? Então, existe uma condição que podemos testar com base nessa informação? Nesse contexto, quais seriam as outras condições?

- **MOMENTO VI (14:45-14:50)**

Na fase de discussão coletiva, o professor terá um papel como moderador.

O docente deverá ordenar a apresentação das resoluções dos alunos, e incentivar os alunos a explicarem o seu raciocínio, a avaliar as respostas dos seus colegas, e a identificarem erros na sua própria resolução.

A ordem como as resoluções devem ser expostas dependerá do tipo de representação utilizada e a sua eficácia, dos erros cometidos, e da justificação.

Na primeira e segunda questão, vou começar pelos grupos que tenham apresentado uma justificação incompleta e/ou tenham tido maiores dificuldades durante a resolução. Adicionalmente, vou utilizar um *applet* em *Geogebra com* representações das superfícies esféricas enunciadas para auxiliar os alunos a visualizar a relação entre os pontos P e Q na primeira questão, e a relação entre os pontos T e W, e o centro da superfície esférica S.

Algumas questões a serem colocadas pelo professor:

- Na primeira alínea da questão 1, podemos justificar que como a norma do vetor $\overrightarrow{PQ}$ coincide com o comprimento do diâmetro, então $\overrightarrow{PQ}$ é necessariamente um diâmetro?
- Qual a relação entre os pontos P e Q? Consigo garantir que Q pertence sempre à superfície esférica S?
- Na questão dois, que condições testaram? Como podem ter a certeza que essa é a única condição que faz com que T pertença à superfície esférica?

Anexo 07: Plano de Trabalho – Aula 27-02-2023

<table>
<tr><th colspan="2">PLANO DE AULA</th></tr>
<tr><td>ESCOLA SECUNDÁRIA Rainha Dona Leonor
Matemática 10º Ano
27 fevereiro 2020
Hora: 17:00h às 18:30h</td><td>Domínio/Unidade didática: Cálculo Vetorial no Espaço

SUMÁRIO:

▪ Interseção de retas com planos e superfícies esféricas/esferas. Resolução da ficha de trabalho E</td></tr>
<tr><th colspan="2">TÓPICOS</th></tr>
<tr><td colspan="2">▪ Equação vetorial de uma reta.
▪ Sistema de equações paramétricas de uma reta.
▪ Interseção entre retas e superfícies esféricas/esfera;
▪ Interseção entre retas e planos.</td></tr>
<tr><th colspan="2">OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM</th></tr>
<tr><th>GERAL</th><th>ESPECÍFICOS</th></tr>
<tr><td>▪ Reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas propriedades das equações vetoriais e sistemas de equações paramétricas.</td><td>▪ Justificar e interpretar resultados no contexto do problema proposto.
▪ Intersetar analiticamente uma reta com uma superfície esférica/esfera e com um plano e compreender o significado no contexto do problema proposto.</td></tr>
<tr><th colspan="2">CAPACIDADES TRANSVERSAIS</th></tr>
<tr><td colspan="2">▪ Comunicação Matemática – Comunicar usando diversas formas de representação (Visual, Simbólica e Verbal).
▪ Resolução de problemas.
▪ Raciocínio Matemático.</td></tr>
<tr><th colspan="2">CONHECIMENTOS PRÉVIOS</th></tr>
<tr><td colspan="2">▪ Definição e propriedades da colinearidade de vetores.
▪ Definição e propriedades da equação vetorial de uma reta.
▪ Equação reduzida de uma superfície esférica.
▪ Manipulação de expressões algébricas (7º e 8º ano).
▪ Resolver problemas envolvendo análise e interpretação de coordenadas no espaço.</td></tr>
<tr><th colspan="2">RECURSOS</th></tr>
<tr><th>Professor</th><th>Alunos</th></tr>
<tr><td>▪ Ficha de trabalho E
▪ Quadro branco
▪ PowerPoint</td><td>▪ Ficha de trabalho E
▪ Caderno</td></tr>
<tr><th colspan="2">METODOLOGIA DE TRABALHO</th></tr>
<tr><td colspan="2">▪ Trabalho em grupo-turma durante a apresentação do PowerPoint e discussão das conclusões.</td></tr>
</table>

- Trabalho em grupo de dois a três alunos durante a resolução da ficha.

AVALIAÇÃO

- Avaliação formativa: No decorrer do trabalho autónomo, usando a observação como instrumento de avaliação, o professor deve averiguar a participação e o interesse do aluno. No momento da discussão das resoluções dos exercícios, o professor deve avaliar a participação e a capacidade do aluno em exprimir as suas ideias, escrita e oralmente, verificando o rigor matemático.

DESENVOLVIMENTO DA AULA

A aula será dividida em quatro momentos, correspondendo respetivamente a:

- Entrada inicial dos alunos (5 minutos)
- Resolução e discussão de dois exercícios, em turma, sobre como determinar coordenadas de pontos na interseção entre retas e planos e entre retas e superfície esféricas/esfera (20 minutos).
- Apresentação da ficha de trabalho E (15 minutos);
- Resolução autónoma da ficha de trabalho E (50 minutos);

➢ MOMENTO I (17:00-17:05)

Este momento terá início com a entrada inicial dos alunos.

➢ MOMENTO II (17:05-17:25)

Este momento será dedicado à apresentação e resolução de dois exercícios.

Exercício 1:

1. Considera, fixado um referencial ortonormado do espaço, o ponto $A(2,0,0)$ e o vetor $\vec{u}(-4,2,2)$. Seja r a reta que passa em A e tem a direção do vetor $\vec{u}$.

a) Determina as coordenadas do ponto P, **interseção da reta r com o plano α**: $x+y=1$.

r: $(x,y,z)=(2,0,0)+k\,(-4,2,2), k\epsilon\mathbb{R}$
α: $x+y=1$.

$$\begin{cases} x=2-4k \\ y=0+2k \\ z=0+2k \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-4k \\ y=2k \\ z=2k \\ y=1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-4k \\ 1-x=2k \\ \_\_\_\_\_\_ \\ y=1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-4k \\ x=1-2k \\ \_\_\_\_\_\_ \\ y=1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2k=2-4k \\ \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=\frac{1}{2} \\ \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ y=2*\frac{1}{2}=1 \\ z=1 \\ x=0 \end{cases}$$

O ponto P tem coordenadas $(0,1,1)$.

Exercício 2:

2. Considera, fixado um referencial ortonormado do espaço, o ponto $B(-1,1,3)$ e o vetor $\vec{v}(1,-1,-2)$. Seja r a reta que passa em B e tem a direção do vetor $\vec{v}$.

a) Determina as coordenadas dos pontos de **interseção da reta r com a superfície esférica** **S**: $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 2$.

r: $(x,y,z) = (-1,1,3) + k\,(1,-1,-2), k \in \mathbb{R}$
S: $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 2$

$G\,(\underbrace{-1+k}_{x}, \underbrace{1-k}_{y}, \underbrace{3-2k}_{z}), k\in\mathbb{R}$ é um ponto genérico da reta r

" Substituir na equação de S" : $G \in S \Leftrightarrow (\underbrace{-1+k}_{x} - 1)^2 + (\underbrace{1-k}_{y})^2 + (\underbrace{3-2k}_{z})^2 = 2 \Leftrightarrow k = 1 \vee k = 2$

Vamos obter dois pontos de interseção: $P(-1+1, 1-1, 3-2*1) = P(0,0,1)$

$Q(-1+2, 1-2, 3-2*2) = Q(1,-1,-1)$

Pontos a destacar:

1. Antes da apresentação do segundo exercício, o professor deve questionar os alunos se acham que o procedimento adotado é a forma mais eficaz de resolver o exercício, e só depois introduzir o método do ponto genérico.

2. Deve-se salientar que apesar de nos exemplos propostos, o método do ponto genérico ser o mais eficaz, que ambos os procedimentos devem produzir os mesmos resultados.

➢ **MOMENTO III (17:25-17:40)**

Este momento terá início com uma breve introdução à ficha de trabalho. Prevê-se uma primeira explicação do enunciado da alínea 8.1:

- O problema diz respeito a um navio equipado com um radar;
- Os alunos devem identificar se a trajetória do cachalote interseta o lugar geométrico definido pelo radar e interpretar se o resultado obtido faz sentido no contexto do problema.

Em seguida é explicado o que se pretende da alínea 8.2:

- Um submarino vai lançar um torpedo com uma determinada trajetória retilínea. Pretende-se que os alunos escrevam, para a primeira questão desta alínea, a equação que define o plano mediador onde se encontra a mina e, em seguida, determinem as coordenadas correspondentes à sua localização.

- Na segunda questão, os alunos devem compreender que a embarcação não se encontra na trajetória do torpedo e por isso, é desnecessário determinar a distância compreendida entre o submarino e a embarcação.

➢ **MOMENTO IV (17:40-18:30)**

Durante a realização da tarefa, o professor circula pela sala a fim de:

- Apoiar os alunos, através do questionamento, em eventuais dificuldades inerentes à resolução da tarefa;
- Observar as diferentes respostas dadas pelos alunos;

Questão/ Momento	Atividade do Aluno	Atividade do professor
1.1	**<u>Dificuldades</u>** ▪ Os alunos determinam corretamente as coordenadas do ponto de interseção. ▪ O aluno não consegue compreender como determinar a equação vetorial que define a trajetória retilínea do cachalote. ▪ O aluno não consegue compreender como determinar a equação que representa o lugar geométrico definido pelo radar. ▪ Os alunos não sabem definir e/ou manipular a expressão algébrica obtida da interseção de um ponto genérico da reta com a condição que define a esfera.	**<u>Questões orientadoras</u>** ▪ Já conseguiste identificar as coordenadas do ponto de interseção da trajetória retilínea do cachalote com o lugar geométrico definido pelo radar, certo? Então, como interpretas o resultado obtido? ▪ Qual a localização inicial do cachalote? E por qual ponto ele vai passar? E para ir desse ponto A para o ponto B, o cachalote vai seguir que tipo de trajetória? ▪ O que é dito no enunciado sobre o radar? Se está equipado no navio e consegue detetar qualquer movimento à sua volta, qual o lugar geométrico definido pelo radar? Para definires uma esfera, o que é preciso? ▪ Já tens a equação que define a trajetória do cachalote e a equação que define a esfera, agora o que é necessário fazer? Como se obtém um ponto genérico de uma reta? Agora que tens o ponto genérico, o que é preciso fazer na equação da esfera? O que representa o valor da incógnita que vais obter? ▪ Tens uma equação de que grau? Completa ou incompleta? Se é completa, qual a fórmula que se pode usar?

1.2 **a)**	▪ Os alunos não conseguem definir a equação do plano mediador. ▪ Os alunos não compreendem que a localização da mina pode ser determinada intersetando a trajetória do torpedo com o plano mediador do segmento de reta [NS].	▪ O que significa que a mina se encontra no plano mediador do segmento de reta [NS]? Consegues desenhar um plano mediador de um segmento de reta? Algebricamente, como se obtém um plano mediador de um segmento de reta? ▪ O que significa "Sabendo que o torpedo deverá atingir uma mina subaquática"? Significa que a trajetória do torpedo está alinhada com a localização da mina, ou não? Agora tens mais alguma informação sobre a localização da mina? Se sabes que a mina tem que estar na trajetória do torpedo e no plano que definiste há pouco, como se obtém as coordenadas correspondente à localização da mina?
1.2 **b)**	▪ Os alunos verificam que a embarcação não está na trajetória ▪ Os alunos começam por calcular a norma do vetor $\overrightarrow{SE}$ e determinam que como a distância é aproximadamente 3,5km e a trajetória retilínea do torpedo é garantida até 4km, então a embarcação pode ser atingida.	▪ Se a embarcação não está na trajetória do torpedo, significa que existe perigo ou não da embarcação ser atingida? ▪ Qual a direção do torpedo lançado pelo submarino? Verificaste que o torpedo, seguindo essa direção, interseta a embarcação? Então, como tens a certeza absoluta que a embarcação é atingida?

Anexo 08: Plano de Trabalho – Aula 01-03-2023

<table>
<tr><th colspan="2">PLANO DE AULA</th></tr>
<tr><td>ESCOLA SECUNDÁRIA Rainha Dona Leonor
Matemática 10.º Ano
01 março 2023
Hora: 10:00h às 11:30h</td><td>Domínio/Unidade didática: Cálculo Vetorial no Espaço

SUMÁRIO:

▪ Discussão coletiva da ficha de trabalho E. Resolução da ficha de trabalho F.</td></tr>
<tr><th colspan="2">TÓPICOS</th></tr>
<tr><td colspan="2">▪ Equação vetorial de uma reta no espaço
▪ Sistema de equações paramétricas de uma reta no espaço
▪ Interseção entre retas e superfícies esféricas/esfera
▪ Interseção entre retas e planos</td></tr>
<tr><th colspan="2">OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM</th></tr>
<tr><th>GERAL</th><th>ESPECÍFICOS</th></tr>
<tr><td>▪ Reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas propriedades das equações vetoriais e sistemas de equações paramétricas</td><td>▪ Justificar e interpretar resultados no contexto do problema proposto.
▪ Intersetar analiticamente uma reta com uma superfície esférica/esfera e com um plano e compreender o significado no contexto do problema proposto.</td></tr>
<tr><th colspan="2">CAPACIDADES TRANSVERSAIS</th></tr>
<tr><td colspan="2">▪ Comunicação Matemática – Comunicar usando diversas formas de representação (Visual, Simbólica e Verbal).
▪ Raciocínio Matemático.
▪ Resolução de problemas.</td></tr>
<tr><th colspan="2">CONHECIMENTOS PRÉVIOS</th></tr>
<tr><td colspan="2">▪ Definição e propriedades da colinearidade de vetores.
▪ Definição e propriedades da equação vetorial de uma reta.
▪ Equação reduzida de uma superfície esférica.
▪ Manipulação de expressões algébricas (7º e 8º ano).
▪ Resolver problemas envolvendo análise e interpretação de coordenadas no espaço.</td></tr>
<tr><th colspan="2">RECURSOS</th></tr>
<tr><th>Professor</th><th>Alunos</th></tr>
<tr><td>▪ PowerPoint
▪ Ficha de trabalho E e F
▪ Quadro branco</td><td>▪ Ficha de trabalho E e F
▪ Caderno</td></tr>
<tr><th colspan="2">METODOLOGIA DE TRABALHO</th></tr>
<tr><td colspan="2">▪ Discussão das resoluções da ficha E e F em grupo-turma.
▪ Trabalho autónomo na resolução da ficha F.</td></tr>
</table>

AVALIAÇÃO

- Avaliação formativa: No decorrer do trabalho autónomo, usando a observação como instrumento de avaliação, o professor deve averiguar a participação e o interesse do aluno. No momento de discussão coletiva, o professor deve avaliar a participação e a capacidade do aluno em exprimir as suas ideias, escrita e oralmente, verificando o rigor matemático.

DESENVOLVIMENTO DA AULA

A aula será dividida em sete momentos, correspondendo respetivamente a:

- Entrada inicial dos alunos (5 minutos);
- Discussão coletiva da ficha de trabalho E (30 minutos);
- Apresentação da ficha de trabalho F – Parte I (2 minutos);
- Resolução autónoma da ficha de trabalho F – Parte I (15 minutos);
- Discussão coletiva da ficha de trabalho F – Parte I (15 minutos);
- Apresentação da ficha de trabalho F – Parte II (3 minutos);
- Resolução autónoma da ficha de trabalho F – Parte I (20 minutos);

➢ **MOMENTO I (10:00 -10:05)**

Este momento terá início com a entrada inicial dos alunos.

➢ **MOMENTO II (10:05 -10:35)**

Na fase de discussão coletiva, o professor terá um papel como moderador.

O docente deverá ordenar a apresentação das resoluções dos alunos, e incentivar os alunos a explicarem o seu raciocínio, a avaliar as respostas dos seus colegas, e a identificarem erros na sua própria resolução.

A ordem como as resoluções devem ser expostas dependerá do tipo de representação utilizada e a sua eficácia, dos erros cometidos, e da justificação.

Na 1.1 e na primeira alínea da questão 1.2, vou começar pelos grupos que tenham apresentado uma justificação incompleta e/ou tenham tido maiores dificuldades durante a resolução. Adicionalmente, na 1.1, vou dar prioridade, se existir, aos grupos que tenham utilizado representações visuais, no intuito de auxiliar os alunos durante a visualização da figura. Se não existir, vou utilizar um *applet* em *Geogebra* com uma representação da figura do enunciado.

Algumas questões a serem colocadas pelo professor:

- A trajetória do cachalote, segundo o enunciado, representa-se por uma reta, ou por uma semirreta? Por quê?
- As coordenadas do ponto de interseção são (2,3,2), esse ponto está no alcance do radar? Por quê?
- No contexto do problema é viável que o cachalote se encontre no ponto de coordenadas (2,3,2)? Por quê?

➢ **MOMENTO III (10:35 -10:37)**

Este momento terá início com uma breve introdução à ficha de trabalho F – Parte I.

- No enunciado estão presentes três resoluções da questão 1.2 alínea b) da ficha de trabalho E, pretende-se que os alunos analisem cada uma das resoluções e as classifiquem com as expressões enunciadas.

O professor deve salientar que eles dispõem de 20 minutos para resolver a ficha.

Atividade do aluno (e possíveis dificuldades)	**Atividade do Professor** (e estratégias para lidar com possíveis dificuldades dos alunos)
▪ Os alunos podem colocar dúvidas sobre o enunciado das questões, quer em termos de linguagem, quer em termos do que é dado e do que é pedido.	▪ Explicar o que será feito e o modo como vai decorrer a aula; ▪ Distribuição do enunciado da tarefa a realizar, indicando que deve ser feita a pares; ▪ Ler o enunciado e anunciar o início do período de trabalho.

- **MOMENTO IV (10:37-10:52)**

Durante a realização da tarefa, o professor circula pela sala a fim de:

- Apoiar os alunos, através do questionamento, em eventuais dificuldades inerentes à resolução da tarefa;
- Observar as diferentes respostas dadas pelos alunos a fim de ordená-las da forma mais apropriada para o momento seguinte.

Questão/ Momento	**Atividade do Aluno**	**Atividade do professor**
1.	**<u>Dificuldades</u>** ▪ O aluno não consegue diferençar uma resolução não válida/incorreta de uma resolução incompleta. ▪ O aluno não sabe se uma resolução com a resposta correta, mas com os cálculos errados pode ser considerada incompleta.	**<u>Questões orientadoras</u>** ▪ Para uma resolução ser incompleta, o que deve acontecer primeiro? Uma resolução pode ser incompleta, se for incorreta? ▪ Se estas a considerar incompleta, o que lhe falta então para estar completar? Se lhe falta acertar os cálculos, o que isso significa?

- **MOMENTO V (10:52-11:07)**

Na fase de discussão coletiva, o professor terá um papel como moderador.

O docente deverá ordenar a apresentação das resoluções dos alunos, e incentivar os alunos a explicarem o seu raciocínio, a avaliar as respostas dos seus colegas, e a identificarem erros na sua própria resolução.

O professor deve começar por questionar os alunos sobre o que optaram para cada uma das resoluções e começar pelos alunos que tenham escolhido uma classificação pouco unânime e que não seja a melhor fundamentada, até chegar na classificação mais plausível. Caso a classificação mais escolhida seja uma que não considere a mais adequada, vou começar por essa.

➢ **MOMENTO VI (11:07-11:10)**

Este momento terá início com uma breve introdução à ficha de trabalho F – Parte II. Prevê-se uma primeira explicação do enunciado da primeira questão:

- O enunciado da primeira questão é semelhante ao da primeira questão da ficha de trabalho E, mas com uma pergunta diferente. Pretende-se que os alunos identifiquem que a equação vetorial apresentada, representa a interseção da trajetória retilínea do cachalote com o lugar geométrico definido pelo cachalote.

Em seguida é explicado o que se pretende da segunda questão:

- Os alunos devem identificar que a reta definida no enunciado é perpendicular ao plano xOy.

Depois o professor explica o que é pedido na última questão da ficha:

- Um pescador encontra-se a uma distância de pelo menos 2km, mas não superior a 4km, do navio.
- Pretende-se que os alunos definam por uma condição a zona onde o pescador naufragou, recorrendo à condição que define o alcance do radar do navio, e calculem a área dessa região.

O professor deve salientar que eles dispõem de 20 minutos para resolver a ficha.

Atividade do aluno (e possíveis dificuldades)	**Atividade do Professor** (e estratégias para lidar com possíveis dificuldades dos alunos)
▪ Os alunos podem colocar dúvidas sobre o enunciado das questões, quer em termos de linguagem, quer em termos do que é dado e do que é pedido.	▪ Explicar o que será feito e o modo como vai decorrer a aula; ▪ Distribuição do enunciado da tarefa a realizar, indicando que deve ser feita a pares; ▪ Ler o enunciado e anunciar o início do período de trabalho.

➢ **MOMENTO VII (11:10-11:30)**

Durante a realização da tarefa, o professor circula pela sala a fim de:

- Apoiar os alunos, através do questionamento, em eventuais dificuldades inerentes à resolução da tarefa;

Questão/ Momento	Atividade do Aluno	Atividade do professor
1.1.	**<u>Dificuldades</u>** ▪ O aluno determina uma equação vetorial diferente da do enunciado. ▪ O aluno não compreende o intervalo definido na equação vetorial.	**<u>Questões orientadoras</u>** ▪ O facto de teres determinado uma equação vetorial diferente da do enunciado significa que definiste uma reta diferente? ▪ Quando substituis na equação vetorial o λ por 0, vais obter o quê? E quando substituis por 1? E esse valor, no contexto do problema, representa o quê? Então porque o intervalo é aberto no extremo direito?
1.2.	▪ O aluno não compreende o comportamento da reta definida no enunciado.	▪ Diz-me exemplos de pontos que pertencem à reta do enunciado. O que todas elas têm em comum? Exato, então como será uma representação visual dessa reta?
1.3.	▪ O aluno não consegue definir a região onde o pescador está em apuros.	▪ Consegues explicar-me, por palavras tuas, qual será o aspecto da região onde está o pescador? Então, e esse anel é definido pelo quê? ▪ Já experimentaste fazer um desenho que represente a situação? Por exemplo, começar por definir a zona que fica a menos de 4km do navio?

Anexo 09: Ficha de Trabalho A

MATEMÁTICA A – 10º ANO

FICHA DE TRABALHO **A**

Nome: ___________________________________

1. No exercício 9 da página 36 do manual *Máximo 10* com os vetores $\vec{u}(1,-2,2)$ e $\vec{v}(-1,2,4)$ ocorreu o seguinte caso:

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| \neq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

Dados dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, em que condições se verifica a igualdade $\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\| = \|\vec{a}\| + \|b\|$? Justifica.

2. Considera um referencial $o.n\ Oxyz$ e os vetores:

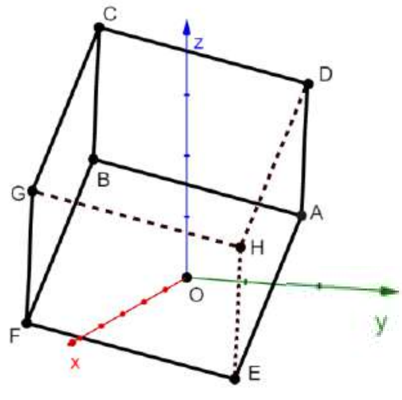
$$\vec{a}(2,1,-1);\ \vec{b}(2,-1,1);\ \vec{c}(-4,2,-2) \text{ e } \vec{d}\left(\sqrt{2},-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Verifica se há, entre estes vetores, pares de vetores colineares e, em caso afirmativo, indica, justificando, se têm o mesmo sentido.

3. Na figura ao lado, está representado um cubo, num referencial $o.n\ Oxyz$.

Sabe-se que:

- $[ABCD]$ é uma face do cubo.
- $[EFGH]$ é a face oposta à face $[ABCD]$
  (o ponto H não está representado na figura)
- $[AE], [BF], [CG]$ e $[DH]$ são quatro arestas do cubo.
- O ponto A tem coordenadas $(3,5,3)$
- O ponto D tem coordenadas $(-3,3,6)$
- O ponto E tem coordenadas $(1,2,-3)$



Determina as coordenadas do ponto H e indica, justificando, o valor lógico da seguinte afirmação: o ponto H pertence a um dos eixos coordenados.

Anexo 10: Ficha de Trabalho B

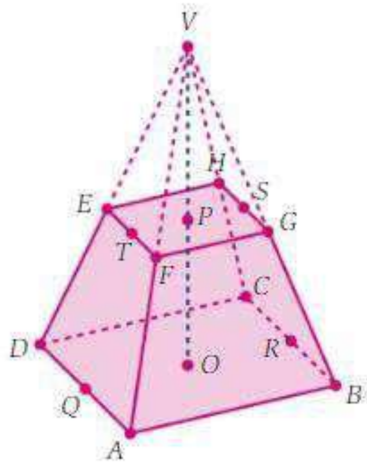
MATEMÁTICA A – 10º ANO
FICHA DE TRABALHO **B**

Nome: ____

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS RAINHA DONA LEONOR

Para responder às seguintes questões, apresenta todos os **cálculos** que tiveres de efetuar e todas as **justificações** necessárias.

1. Fixado um referencial ortonormado do espaço foi representada uma pirâmide quadrangular regular de vértice $V(1,1,10)$ e base $[ABCD]$, com $9cm$ de altura. Um plano paralelo à base interseta a pirâmide definindo o quadrado $[EFGH]$.



Sabe-se ainda que:

- $\overrightarrow{VE}\ (-1,-1,-3), \overrightarrow{VG}\ (1,1,-3), \overrightarrow{EF}\ (2,0,0)$ e $R(1,4,1)$;
- Os pontos O e P são os centros das bases do tronco de pirâmide;
- Os pontos Q, R, S e T são os pontos médios dos segmentos de reta a que pertencem.

1.1 Determina as coordenadas dos vértices F e G e do vetor $\overrightarrow{VH}$.

1.2 Indica, justificando, o valor lógico da seguinte afirmação: o tronco de pirâmide $[ABCDEFGH]$ tem uma capacidade inferior a $100cm^3$.

Anexo 11: Ficha de Trabalho C

MATEMÁTICA A – 10º ANO

FICHA DE TRABALHO **C**

Nome: ________________________________

Para responder às seguintes questões, apresenta todos os **cálculos** que tiveres de efetuar e todas as **justificações** necessárias.

1. Num referencial o.n Oxyz, considera os pontos $A(-1,\ 1,\ 3)$, $\mathrm{B}(1,\ 0,\ 6)$ e o vetor $\vec{u}(2,3,5)$.

a) Existe uma única equação vetorial para a reta que tem a direção de $\vec{u}$ e que passa em A? Justifica.

b) Escreve uma condição que defina o segmento de reta $[AB]$ e averigua se o ponto P de coordenadas $(-5, 3, -3)$ pertence a $[AB]$.

c) A reta AB interseta o eixo Ox? Em caso afirmativo, determina as coordenadas do ponto de interseção.

2. Indica, justificando, o valor lógico das seguintes afirmações:

	V	F
a) O vetor $\overrightarrow{AA}$ é colinear com qualquer outro vetor.	☐	☐
b) Todos os pares de vetores com o mesmo comprimento e sentidos opostos são vetores simétricos.	☐	☐
c) Os vetores $\vec{u}(1,5,4)$ e $\vec{v}(1,4,5)$ são iguais.	☐	☐
d) Se os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ são colineares, então os pontos A, B e C pertencem à mesma reta.	☐	☐
e) Sabendo que os pontos A, B e C pertencem à mesma reta, então os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ são colineares.	☐	☐
f) Se os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são colineares, os pontos A, B, C e D pertencem à mesma reta.	☐	☐

Anexo 12: Ficha de Trabalho D – Parte I

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

MATEMÁTICA A – 10º ANO

FICHA DE TRABALHO **D – Parte I**

Nome: ___________________________________

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS RAINHA DONA LEONOR

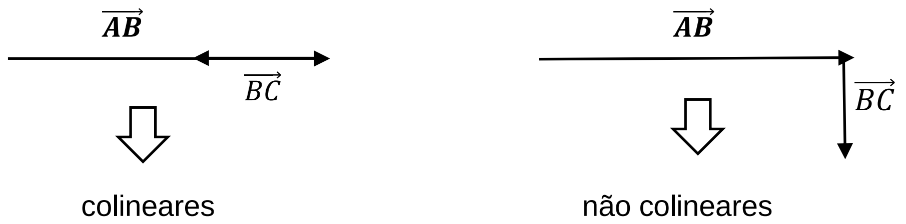
Na questão 2 d) da ficha de trabalho C, pedia-se para determinar o valor lógico da seguinte afirmação:

> “Se os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ são colineares, então os pontos A, B e C pertencem à mesma reta.”

Com base nas seguintes resoluções (apresentadas por alguns grupos), responde às questões.

Resolução A

“Verdadeiro, como os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ têm o ponto B em comum pertencem à mesma reta, mas caso estes vetores não fossem colineares esta afirmação não poderia ser verdadeira, porque não teriam a mesma direção. “



Resolução B

“Afirmação verdadeira. Como têm um ponto em comum são colineares, ao serem colineares têm a mesma direção, fazendo com que pertençam à mesma reta.”

Resolução C

“Verdadeiro, pois o último do vetor $\overrightarrow{AB}$ e o primeiro $\overrightarrow{BC}$ são o mesmo ponto, portanto estão de seguida, ou seja, pertencem à mesma reta.”

Resolução D

“Sabendo que $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ são colineares, têm a mesma direção. Como o ponto B é comum aos 2 vetores, não é possível que a colinearidade se verifique entre 2 retas paralelas. Logo, a afirmação é verdadeira.”

Questões

1. Qual das resoluções A, B, C ou D, consideras que apresenta uma melhor fundamentação? Justifica a tua resposta.

2. Classifica cada uma dessas resoluções, utilizando as expressões: “não válida”, “incompleta”, “completa”, e ordena-as de 1 a 4, em que 1 é não válida e 4 é a mais completa. Fundamenta a tua resposta.

Revê agora a justificação do teu grupo.

3. Consideras que é uma justificação válida? Porquê?

4. Caso não consideres a justificação do teu grupo válida e/ou completa, explica como a poderias melhorar.

Anexo 13: Ficha de Trabalho D – Parte II

MATEMÁTICA A – 10º ANO

FICHA DE TRABALHO **D – Parte II**

Nome: ____________________________________

1. Num referencial $o.\ n.\ Oxyz$, considera a superfície esférica S de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ e o ponto $P(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$ pertencente a S.

   Seja $\vec{u} = -2\overrightarrow{OP}$ e seja $Q = P + \vec{u}$

   a) Determina as coordenadas do ponto Q e averigua se o segmento de reta $[PQ]$ é um diâmetro da superfície esférica S. Justifica a tua resposta.

   b) Podemos generalizar o resultado da alínea anterior considerando *P* um ponto qualquer da superfície esférica *S*? Fundamenta a tua resposta.

2. Seja R uma superfície esférica qualquer e W um ponto de R, num referencial $o.n.Oxyz$. Em que condições podemos afirmar que $T = W - 2\overrightarrow{OW}$ pertence à superfície esférica? Justifica a tua resposta.

Anexo 14: Ficha de Trabalho E

MATEMÁTICA A – 10º ANO

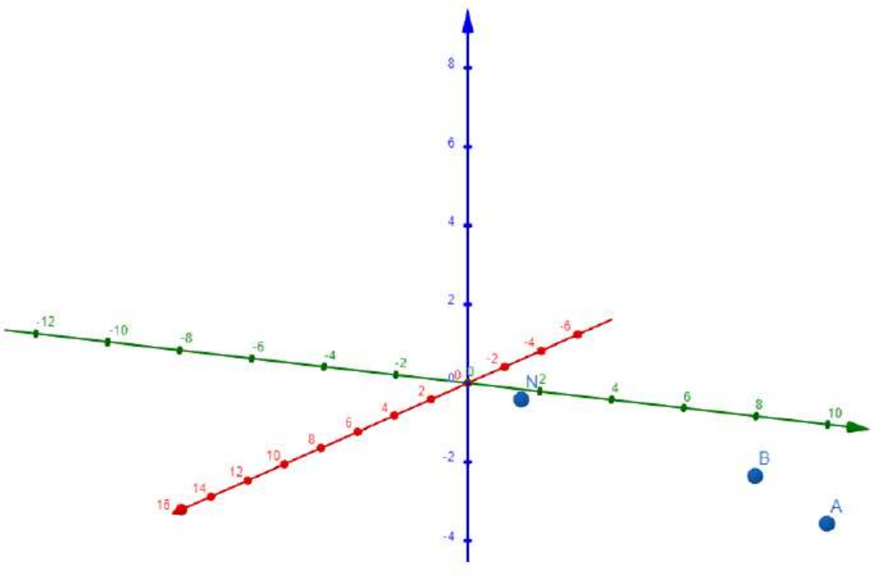
FICHA DE TRABALHO **E**

Nome: ____________________________________

1. Num referencial $o.n, Oxyz$, em que a unidade é o quilómetro, considera que existe um navio equipado com um radar que consegue detetar todo o movimento, no mar ou no ar, até um raio de $\sqrt{6}\,km$, inclusive. O nível da água do mar é representado pelo plano xOy e o navio encontra-se parado no ponto $N(1,2,0)$.

1.1) O navio recebeu uma informação, por rádio, sobre um cachalote localizado no ponto $A(2,11,-2)$. Admite que o cachalote vai seguir uma trajetória retilínea, passando pelo ponto $B(2,9,-1)$.

Investiga se, na sua trajetória, o cachalote irá ser detetado pelo radar do navio. Justifica a tua resposta.



Sugestão: Começa por escrever uma condição que represente o conjunto de pontos que o radar consegue detetar e identifica esse lugar geométrico.

1.2) Um submarino, localizado no ponto $S(-1,2,-2)$ vai lançar um torpedo com a direção do vetor $\vec{t}\ (\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$ numa trajetória retilínea garantida até $4000\,m$ desde o local do seu lançamento.

a) Sabendo que o torpedo irá atingir uma mina subaquática localizada no plano mediador do segmento de reta $[NS]$, determina as coordenadas do ponto correspondente à localização da mina.

b) Verifica se existe perigo de o torpedo poder atingir uma embarcação que se encontra encalhada no ponto $E(1,4,0)$. Fundamenta a tua resposta.

Anexo 15: Ficha de Trabalho F – Parte I

MATEMÁTICA A – 10º ANO

FICHA DE TRABALHO **F – Parte I**

Nome: ______________________________________

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS RAINHA DONA LEONOR

Na alínea 1.2 b) da ficha de trabalho E, era questionado o seguinte:

1.2) Um submarino, localizado no ponto $S(-1,2,-2)$ vai lançar um torpedo com a direção e sentido do vetor $\vec{t}$ $(\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2})$ numa trajetória retilínea garantida até $4000\ m$ desde o local do seu lançamento.

b) Verifica se existe perigo de o torpedo poder atingir uma embarcação que se encontra encalhada no ponto $E(1,4,0)$. Fundamenta a tua resposta.

Com base nas resoluções propostas, responde à questão.

Resolução A

$$\overline{SE} = \|\overrightarrow{SE}\| = \sqrt{2^2+2^2+2^2} = \sqrt{12} \approx 3{,}5\ km$$

R: Como $\|\overrightarrow{SE}\| \approx 3{,}5\ km < 4km$, existe perigo de o torpedo atingir a embarcação.

Resolução B

$$\begin{cases} 1 = -1+k \\ 4 = 2+2k \\ 0 = -2+k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = 1 \\ k = 2 \end{cases}$$

R: Não pode atingir porque os "k" são diferentes.

Resolução C

$$\begin{cases} 1 = -1+\frac{1}{2}k \\ 4 = 2+k \\ 0 = -2+\frac{1}{2}k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = 2 \\ k = 1 \end{cases}$$

R: E não pertence.

Questão

1. Classifica as resoluções utilizando uma das seguintes as expressões: "incorreta", incompleta" ou "completa". Fundamenta a tua resposta

Anexo 16: Ficha de Trabalho F – Parte II

MATEMÁTICA A – 10º ANO

FICHA DE TRABALHO **F – Parte II**

Nome: ____________________________________

1. Num referencial $o.n, Oxyz$, em que a unidade é o quilómetro, considera que existe um navio equipado com um radar que consegue detetar todo o movimento, no mar ou no ar, até um raio de $\sqrt{6}\,km$, inclusive. O nível da água do mar é representado pelo plano xOy e o navio encontra-se embarcado no ponto $N(1{,}2{,}0)$.

1.1) O navio foi alertado, por rádio, sobre um outro cachalote parado no ponto C(3,6,-2). Admite que o cachalote vai seguir uma trajetória retilínea, passando pelo ponto D $\left(\frac{5}{2}, 5, -\frac{3}{2}\right)$, mas não colidindo com o navio.

Indica, justificando, o valor lógico da seguinte afirmação: A equação vetorial $(x, y, z) = (2{,}4, -1) + \lambda(-1, -2{,}1), \lambda \in [0,\ 1[$ representa o maior percurso percorrido pelo cachalote ao longo da sua trajetória retilínea desde que começa a ser detetado pelo radar do navio.

1.2) Um dos tripulantes do navio verificou, no radar, um golfinho a nadar numa trajetória retilínea definida pela equação $x = 1 \wedge y = 4$.

Admite que o golfinho vai realizar um salto. O salto do golfinho pode ser considerado vertical em relação ao plano que define o nível da água do mar? Fundamenta a tua resposta.

1.3) Um pescador emitiu um alerta de socorro para o navio, segundos antes de naufragar. Admite que o pescador se encontra à superfície da água, a uma distância de pelo menos 2km, mas não superior a 4km, do navio.

Defina, por uma condição no plano, a região onde está o pescador em apuros e calcula a sua área.

Anexo 17: Questão-Aula

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

Questão para avaliação - 3 (2.ºP)
Matemática A

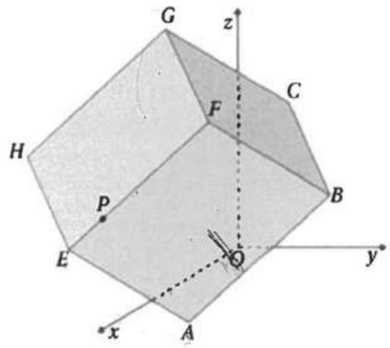
Data: 06 de março — **Professor: João Ferreira**

Nome do aluno____ N.º________ Turma______

Classificação (QA3)____________________

Classificação Final_______________ Assinatura do Prof._______________ Assinatura do EE_____________

1. Considere o cubo $[ABCDEFGH]$, num referencial o.n. $Oxyz$ (o ponto D não está representado na figura).



Admita que as coordenadas de C, G e E são:

- $C(2,3,6)$; $G(6,1,10)$; $E(12,1,4)$

1.1. Determine as coordenadas do ponto A.

1.2. Seja r a reta CG.

1.2.1. Determine uma equação vetorial da reta r.

1.2.2. Determine as coordenadas do ponto de interseção da reta r com o plano yOz.

1.2.3. Indique, justificando, o valor lógico da seguinte afirmação:

"$(x,y,z) = (0,4,4) + k(2,-1,2),\ k \in [1,3]$ é uma equação vetorial do segmento de reta $[CG]$."

1.3. Sabe-se que:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y - 4z = 15$$

é uma equação de uma superfície esférica, S, com centro no ponto D.

1.3.1. Determine as coordenadas do ponto D.

1.3.2. O segmento de reta $[DH]$ é um raio da superfície esférica S? Justifique

1.3.3. Seja t a reta que passa em E e é paralela ao eixo Ox.
Determine as coordenadas dos pontos de interseção da reta t com a superfície esférica S.

FIM

Item	1.1	1.2.1	1.2.2	1.2.3	1.3.1	1.3.2	1.3.1	**Total**
Cotação	10	10	10	10	10	10	20	**80**

Anexo 18: Guião - Entrevista dos Alunos

ENTREVISTA DOS ALUNOS

1. O que acharam das aulas em que foi solicitado a vossa opinião acerca das resoluções dos vossos colegas? Acharam que o vosso contributo foi importante para eles, e vice-versa?

2. Qual foi a dificuldade que sentiram mais durante as resoluções das fichas? Por exemplo, nas questões que tinham de justificar, quais as vossas principais dificuldades?

3. Houve algum aspecto desenvolvido durante as aulas que considerem que vos ajudou a ultrapassar essas dificuldades?

4. Gostaram de trabalhar em grupo? Acham que trabalhar em grupo também vos ajudou superar as dificuldades que sentiram durante a resolução das fichas?